KS2, SG1109, 13/5, 2016, Lösningar

1. Se sidan 146-148 i boken.
2. Definitionen av studstalet ger:

$$\frac{v_2' - v_1'}{v_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_2' - v_1' = \frac{1}{2} v_1 \tag{1}$$

   Rörelsemängden bevaras och eftersom partiklarna har samma massa får vi

$$v_1' + v_2' = v_1 \tag{2}$$

   Ekvationerna (1) och (6) ger att $v_2' = 3v_1/4$ och $v_1' = v_1/4$. Alltså fås

$$\frac{T_e}{T_f} = \frac{{v_1'}^2 + {v_2'}^2}{v_1^2} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8} \tag{3}$$

3. Se sidan 254 i boken.
4.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) = \\ m(r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta + r\dot{z}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z + z\dot{r}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r + zr\dot{\theta}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta) = \\ = m(-zr\dot{\theta}\mathbf{e}_r + (r\dot{z} - z\dot{r})\mathbf{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z) \end{aligned} \tag{4}$$

5.

$$\left[G\frac{mM}{r^2}\right] = [F] \quad \Rightarrow \quad [G]\frac{M^2}{L^2} = MLT^{-2} \quad [G] = L^3T^{-2}M^{-1}\,. \tag{5}$$

   Motsvarande SI-enhet är $m^3/(s^2kg)$.

6. Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$mv_A a(1+e) = mv_P a(1-e)\,. \tag{6}$$

Energins bevarande ger

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM}{a(1+e)} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{mM}{a(1-e)} \tag{7}$$

Ekvation (6) ger

$$v_A \frac{1-e}{1+e} v_P\,, \tag{8}$$

som insatt i (7) ger

$$\frac{1}{2}v_P^2\left(1-\frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}\right) = GM\left(\frac{1}{a(1-e)}-\frac{1}{a(1+e)}\right) \quad \Rightarrow$$

$$v_P^2\frac{2e}{(1+e)^2} = GM\frac{2e}{a(1+e)(1-e)} \quad \Rightarrow \quad v_P = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}\frac{GM}{a}} \tag{9}$$

Slutligen ger (8) och (9)

$$v_A = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}\frac{GM}{a}} \tag{10}$$