

KS2, SG1109, 13/5, 2016, Lösningar

1. Se sidan 146-148 i boken.

2. Definitionen av studstalet ger:

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow v'_2 - v'_1 = \frac{1}{2}v_1 \quad (1)$$

Rörelsemängden bevaras och eftersom partiklarna har samma massa får vi

$$v'_1 + v'_2 = v_1 \quad (2)$$

Ekvationerna (1) och (2) ger att $v'_2 = 3v_1/4$ och $v'_1 = v_1/4$. Alltså fås

$$\frac{T_e}{T_f} = \frac{v_1'^2 + v_2'^2}{v_1^2} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8} \quad (3)$$

3. Se sidan 254 i boken.

4.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) = \\ &= m(r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta + r\dot{z}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z + z\dot{r}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r + zr\dot{\theta}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta) = \\ &= m(-zr\dot{\theta}\mathbf{e}_r + (r\dot{z} - zr)\mathbf{e}_\theta + r^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (4)$$

5.

$$\left[G \frac{mM}{r^2} \right] = [F] \Rightarrow [G] \frac{M^2}{L^2} = MLT^{-2} \quad [G] = L^3T^{-2}M^{-1}. \quad (5)$$

Motsvarande SI-enhet är $m^3/(s^2kg)$.

6. Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$mv_A a(1+e) = mv_P a(1-e). \quad (6)$$

Energins bevarande ger

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM}{a(1+e)} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{mM}{a(1-e)} \quad (7)$$

Ekvation (6) ger

$$v_A = \frac{1-e}{1+e}v_P, \quad (8)$$

som insatt i (7) ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_P^2 \left(1 - \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}\right) &= GM \left(\frac{1}{a(1-e)} - \frac{1}{a(1+e)}\right) \Rightarrow \\ v_P^2 \frac{2e}{(1+e)^2} &= GM \frac{2e}{a(1+e)(1-e)} \Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{1+e}{1-e} \frac{GM}{a}} \end{aligned} \quad (9)$$

Slutligen ger (8) och (9)

$$v_A = \sqrt{\frac{1-e}{1+e} \frac{GM}{a}} \quad (10)$$

