

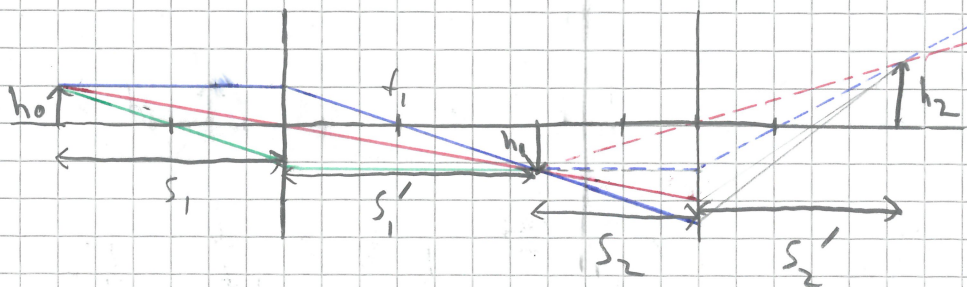
Övning 7

Håkan Wennlöf
hwennlof@kth.se
SK1112

Optiska system

Linsystem Flera linser på rad.

Behandla som en lins i taget! Mellanbilden blir objekt för efterföljande linser.



$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1}$$

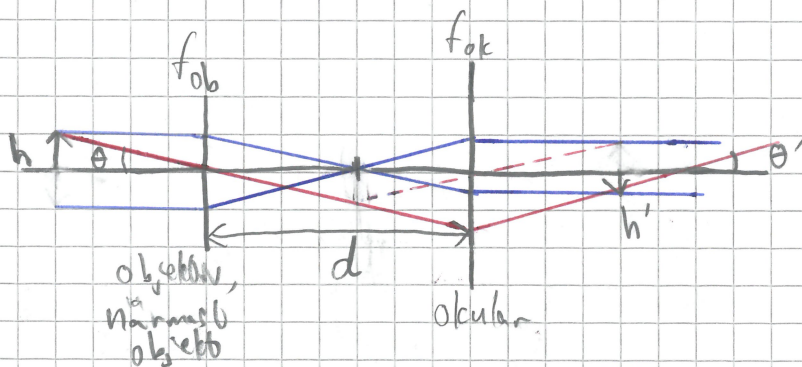
$$h_1 = \frac{s_1'}{s_1} h_0, \text{ dvs förstärkning}$$

$$M_1 = \frac{h_1}{h_0} = \frac{s_1'}{s_1}$$

Afokala system Objekt i oändligheten ger bild i oändlighet.
Parallella strålar in ger parallella strålar ut.

Om två linser; fokus ska sammanfalla!

Avstånd mellan: $d = f_{ob} + f_{ok}$ (objektiv - okular)



Vinkel förstärkning:

$$M_\theta = \frac{\theta'}{\theta} \approx \frac{h}{h'} = - \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

↑
små vinklar

Systemfokallängd Två tunna linser,

För tillsammans fokallängd f_{sys}

$$\frac{1}{f_{\text{sys}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

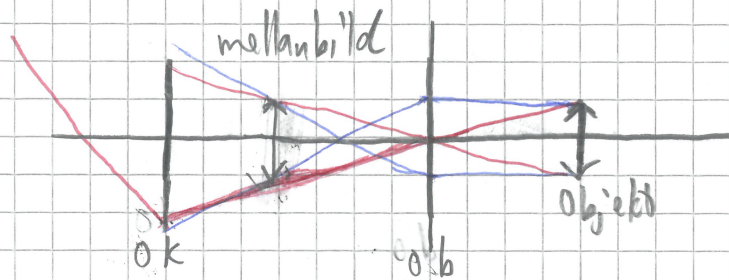
d avstånd mellan linserna, f_1, f_2 fokallängder,

Mikroskop Givets $M_{ob} = 8$, $f_{ob} = f_{ok} = 20 \text{ mm}$.
Sökt: Avstånd mellan objekt och okular.

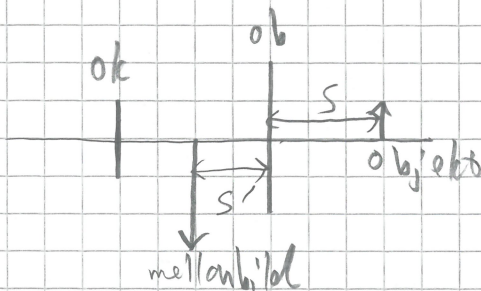
Lösning: (ob = objektiv, ok = okular)

Okular är delen man tittar i. Närmast ögat.
Objektiv är närmast objektet

Rita! Vi har två linser



Givet att objektivförstoringen $M_{ob} = 8$.
Med två linser får vi en mellanbild,
 M_{ob} betyder att mellanbilden ska vara
förstorad med en faktor M_{ob} .



$$M = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = M_{ob} \cdot s \quad \text{här.}$$

Linsformeln (tunn lins): $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$

Vi får $\frac{1}{s} + \frac{1}{M_{ob} \cdot s} = \frac{1}{f_{ob}} \Rightarrow s = f_{ob} \cdot \left(\frac{M_{ob} + 1}{M_{ob}} \right) = \frac{9}{8} f_{ob}$.

Nu har vi avståndet mellan objekt och objektiv.
Vi har avst. objekt - okular.

För skarp bild ska det man tittar på ligga i linsens fokalplan, dvs på fokallängds avstånd från linsen.

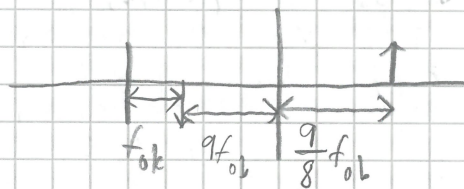
I linssystem kan man titta på en lins i taget, med mellanbilder som objekt!

Mellanbilden som skapas av objektivet ska alltså ligga på avstånd f_{ok} från okulalet.

Vi vet att den ligger på $s' = M_{ob} \cdot s$ från objektivet.

$$s' = M_{ob} \cdot \left(\frac{M_{ob} + 1}{M_{ob}} \right) \cdot f_{ob} = (M_{ob} + 1) f_{ob} = 9 f_{ob}.$$

Totala avståndet objekt - okular:



$$d = f_{ok} + 9f_{ob} + \frac{9}{8}f_{ob} = \left\{ f_{ok} = f_{ob} = f \right\} =$$

$$= \frac{89}{8} f = \frac{89}{8} \cdot 20 \text{ mm} = \underline{\underline{222,5 \text{ mm}}}.$$

Ugnskitare Givet: Objektavstånd $s = 1 \text{ m}$.

$$f_{ob} = 100 \text{ mm}, \quad f_{ok} = 25 \text{ mm}.$$

Slutbild i oändligheten.

Sökt: Vinkelförstärningen M_θ .

Lösning: Vinkelförstärningen ges av kvoten mellan

vinkeln av synfältet som upptas av objektet (utan linserna) och vinkeln av synfältet som upptas av bilden som skapas med linserna.

$$M_{\theta} = \frac{\theta'}{\theta}$$

Hitta θ' : Behöver avståndet till objektet från okulalet. Kallar det för d . Med objekt med höjd h gäller då $\tan \theta = \frac{h}{d}$. Vi antar liten vinkel

$$\Rightarrow \theta = \frac{h}{d}$$

För att hitta d : Vet att vi vill ha slutbild i oändligheten $\Rightarrow$ mellanbilden som skapas av objektivet måste hamna i okulalets fokalplan, dvs 25 mm från okulalet.

För objektivet har vi $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_{ob}} \Rightarrow s' = \left(\frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{s} \right)^{-1}$

s' bildavst., s objektavst. Vi är givna $s = 1 \text{ m}$

$$\Rightarrow s' = \left(\frac{1}{0,1 \text{ m}} - \frac{1}{1 \text{ m}} \right)^{-1} = \frac{1}{9} \text{ m} \approx 0,111 \text{ m}$$

Avståndet mellan linserna blir alltså $111 \text{ mm} + f_{ok} = 136 \text{ mm}$.

Avståndet d , från okular till objekt, blir då

$$d = 136 \text{ mm} + 1000 \text{ mm} = 1136 \text{ mm}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{h}{1136 \text{ mm}}$$

θ' ges av mellanbildens storlek och avstånd till okulalet.

Mellanbildens storlek ges av förstoringen; $M = \frac{s'}{s} = \frac{1}{9}$
 $h' = M \cdot h = \frac{h}{9}$. Avståndet till okulalet är $f_{ok} = 25 \text{ mm}$.

Vi får $\theta' = \frac{h'}{f_{ok}} = \frac{h}{9.25 \text{ mm}} = \frac{h}{225 \text{ mm}}$

Till slut får vi då den sökta vinkelförstärkningen som

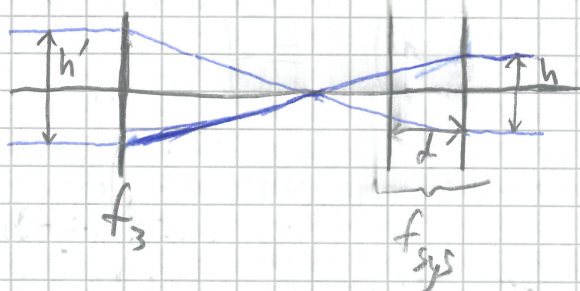
$$M_{\theta} = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\frac{h}{225 \text{ mm}}}{\frac{h}{1125 \text{ mm}}} = \underline{\underline{5}}$$

Ljusbom 2 Givet: 2 linser, $f_1 = f_2 = 20 \text{ mm}$, avst. d mellan, $0 \text{ mm} \leq d \leq 20 \text{ mm}$, och en lins med $f_3 = 200 \text{ mm}$, avst. D från de andra, s.a. systemet afokalt.

Sökt: Förstärkning som funktion av d , Plotta,

Lösning: Afokalt system: parallella strålar in i systemet är parallella efter också. Det betyder att fokus för systemet med linserna f_1 och f_2 måste sammanfalla med fokus för linsen f_3 .

Vi har



Förstärkningen ges av $M = \frac{f_3}{f_{sys}}$ här.

(förstärkningen är faktorn strålens diameter ändras med här).

Vi har att f_{sys} ges av

$$\frac{1}{f_{sys}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \left\{ f_1 = f_2 = f \right\} = \frac{2f - d}{f^2}$$

$$\Rightarrow f_{\text{sys}} = \frac{f_t^2}{2f_t - d} \Rightarrow M = \frac{f_3}{\frac{f_t^2}{2f_t - d}} = \frac{2f_t f_3}{f_t^2} - \frac{d \cdot f_3}{f_t^2}$$

Dvs $M(d)$ är en rät linje!

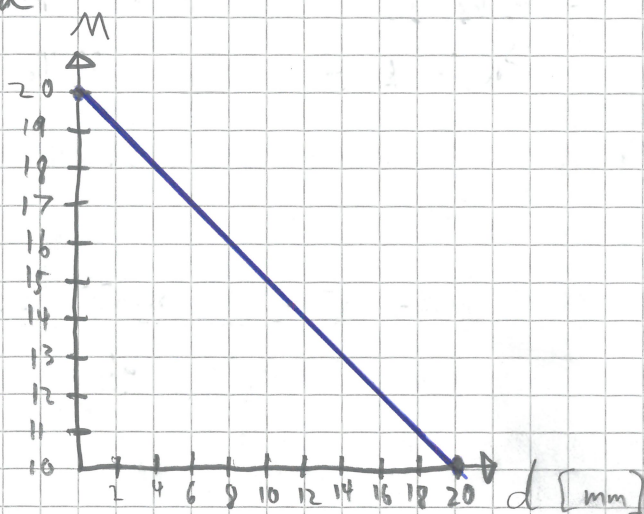
$$M(d) = -\frac{f_3}{f_t^2} \cdot d + \frac{2f_3}{f_t}, \quad f_t = 20 \text{ mm}, \quad f_3 = 200 \text{ mm}.$$

För att rita: vet att rät. Kolla extremer!

$$M(0 \text{ mm}) = 2 \cdot \frac{200 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 20$$

$$M(20 \text{ mm}) = -\frac{200 \text{ mm}}{(20 \text{ mm})^2} \cdot 20 \text{ mm} + 2 \cdot \frac{200 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = -10 + 20 = 10.$$

V: för därmed



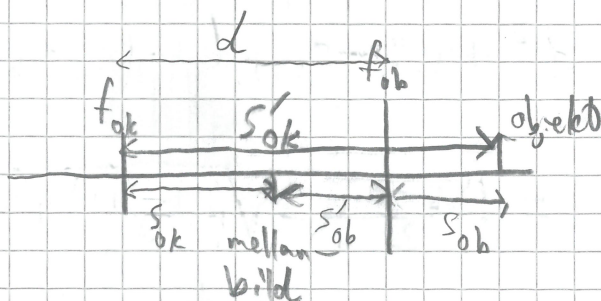
Kirurgmikroskop Givet: $f_{ob} = 50 \text{ mm}$, $f_{ok} = -15 \text{ mm}$.

Objektsavstånd $s_{ok} = 400 \text{ mm}$ (avst. objektiv-objekt).

Avst. d mellan linserna s.a. bilden hamnar på samma ställe som objektet.

Sök: Avstånd d mellan linserna.

Lösning: Rita!



Objektavst. för okularet är avst. till mellanbilden.

Vi vill också att bildavståndet för okulnet, s'_{ok} , ska ligga där objektet ligger. Det ska alltså vara negativt, och lika med avståndet mellan linserna plus avståndet från objektivet till objektet:

$$s'_{ok} = -(d + s_{ob})$$

Vi har också från linsformeln att

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = \frac{f \cdot s}{s - f}$$

$$\Rightarrow s'_{ok} = \frac{f_{ok} \cdot s_{ok}}{s_{ok} - f_{ok}}$$

Behöver hitta s_{ok} !

$$s_{ok} = d - s'_{ok} = d - \frac{f_{ok} \cdot s_{ok}}{s_{ok} - f_{ok}} = d - a_{ob}$$

a_{ob} en konstant.

Sätt s'_{ok} -uttrycket lika!

$$\Rightarrow \frac{f_{ok}(d - a_{ob})}{d - a_{ob} - f_{ok}} = -d - s_{ob}$$

$$\Rightarrow \cancel{f_{ok}d} - f_{ok}a_{ob} = -d^2 + d \cdot a_{ob} + \cancel{d \cdot f_{ok}} - s_{ob} \cdot d + s_{ob}a_{ob} + s_{ob}f_{ok}$$

$$\Rightarrow d^2 + (s_{ob} - a_{ob}) \cdot d - (f_{ok}a_{ob} + s_{ob}a_{ob} + s_{ob}f_{ok}) = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_{ob} - s_{ob}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{ob} - s_{ob}}{2}\right)^2 + f_{ok}a_{ob} + s_{ob}a_{ob} + s_{ob}f_{ok}}$$

Vi har $s_{ob} = 400 \text{ mm}$, $f_{ok} = -15 \text{ mm}$, och $f_{ob} = 50 \text{ mm}$.

$$\Rightarrow a_{ob} = \frac{f_{ob} \cdot f_{ok}}{s_{ob} - f_{ok}} = \frac{50 \text{ mm} \cdot 400 \text{ mm}}{400 \text{ mm} - 50 \text{ mm}} \approx 57,14 \text{ mm} \quad \left(\frac{400}{7} \text{ mm exakt}\right)$$

$$\Rightarrow d = \frac{57,14 \text{ mm} - 400 \text{ mm} + \sqrt{\left(\frac{57,14 - 400}{2}\right)^2 - 15 \cdot 57,14 + 400 \cdot 57,14 - 15 \cdot 400}}{2} \approx 213,04 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d \approx 41,615 \text{ mm} \quad (\text{som i facit})$$

$$\approx 41,6 \text{ mm} \quad (\text{vebbräns värdesiffror})$$

Extravagn/ter Vidvinkelkonverterare Givet: Linsparat

framför kamera ger vidare synvinkel. Objekt och bild i ∞ .

Sökt: Hur fungerar det?

Lösning: Objekt och bild i oändligheten. Vi har alltså ett afokalt system.

För att få plats med mer i bilden (dvs större synfält) så måste vi ha förminskning (förstoringsfaktor < 1).

För afokalt system har vi $M_0 = -\frac{f_{ob}}{f_{ok}}$.

— ger att bilden blir uppochnar.

$$\text{Vi vill } |M_0| < 1 \Rightarrow \frac{|f_{ob}|}{|f_{ok}|} < 1 \Rightarrow |f_{ob}| < |f_{ok}|$$

Antar att vi vill ha rättvänd bild $\Rightarrow f_{ob}$ och f_{ok} olika tecken. Avstånd mellan linser: $d = f_{ob} + f_{ok}$ (ska ha samma fokalpunkt). $d > 0$, så f_{ok} , som är större, måste vara positiv. Vi har därmed att $|f_{ok}| > |f_{ob}|$, $f_{ok} > 0$, $f_{ob} < 0$.

I en mening: Konverteraren funkar som ett teleskop, men bakvänt, så att $|f_{örstöringen}| < 1$ (dvs bilden < objekt, så mer får plats i bilden).

Kikare Givet: Linser:

$$z = 0 \text{ mm}$$

$$f = 60 \text{ mm}$$

$$z = 90 \text{ mm}$$

$$f = 15 \text{ mm}$$

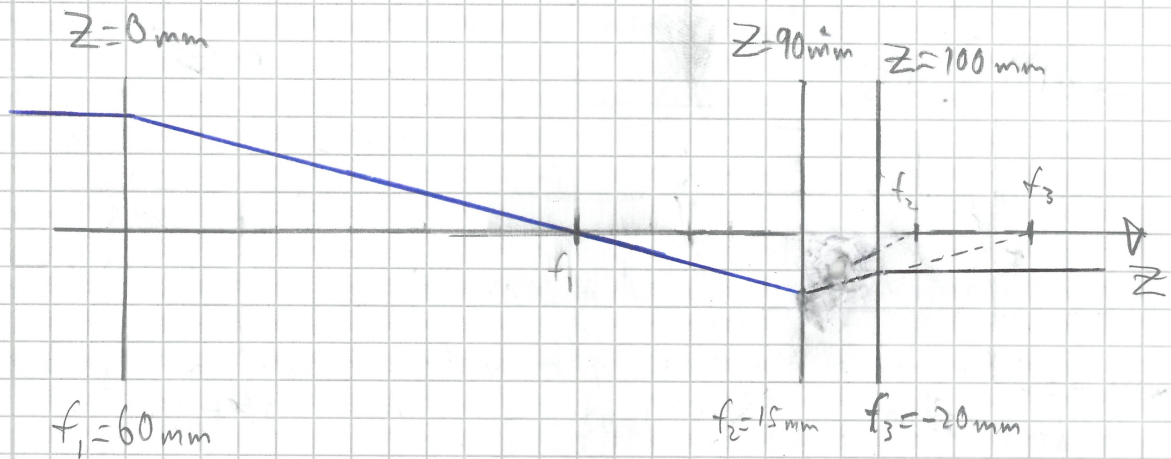
$$z = 100 \text{ mm}$$

$$f = -20 \text{ mm}$$

Sökt: Visa att afokalt, och bestäm vinkelförstärkningen.

Lösning: Vill visa m.h.a. strålkonstruktion.

Vi ritat systemet!



Vill visa att parallella strålar in blir parallella ut.
Ritar med uppmätta raker och linjäl!

Bildarb. efter f_1 är $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = f,$

så bilden som f_2 "ser" ligger i f_1 ; $s_2 = 90 \text{ mm} - f_1 = 30 \text{ mm},$

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow s_2' = \frac{s_2 \cdot f_2}{s_2 - f_2} = \frac{30 \cdot 15}{15} = 30 \text{ mm}.$$

Så bilden från f_2 hamnar i f_3 ! (virtuellt "mellanbild")
Per definition blir då strålarna ut parallella!

Vinkelförstärkning: $M_\theta = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{sys}}} = \frac{f_1}{f_{\text{sys}}}$

$$f_{\text{sys}} = \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{10 \text{ mm}}{f_2 \cdot f_3} \right)^{-1} = 20 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow M_\theta = \frac{60 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = \underline{\underline{3}}$$