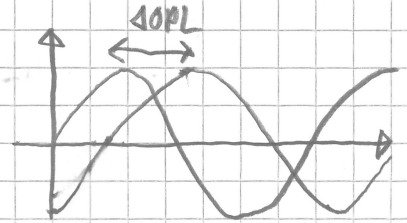


Övning 8

Interferens Optisk väg (optical path length, OPL)

Sträckan ljus färdas genom medium,
viktat med mediets brytningsindex.

ΔOPL skillnad i optisk väg mellan interfererande
ljusstrålar från samma ljuskälla;



Fas skillnad $\Delta\phi$. Hur mycket ljusstrålar är förskjutna
relativt varandra
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta OPL$$

Interferens om två strålar från samma källa,
Intensitet adderas enligt

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\Delta\phi)$$

I_1 intensitet stråle 1, I_2 för stråle 2, $\Delta\phi$ fas skillnaden
mellan dem.

- Maximal konstruktiv interferens: $\Delta\phi = 2\pi \cdot m$

$$\Leftrightarrow \Delta OPL = m \cdot \lambda, \quad m \text{ heltal. } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

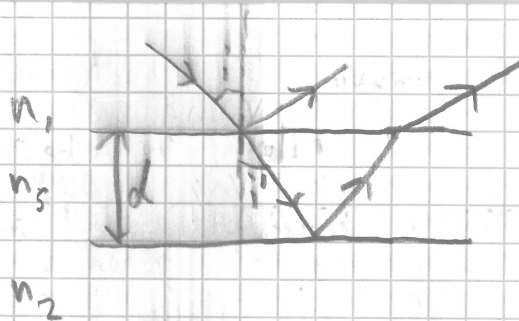
Intensiteten förstärks. Toppar och dalar sammanfaller.

- Maximal destruktiv interferens: $\Delta\phi = 2\pi m + \pi$

$$(\cos\text{-termen ska bli } -1) \Leftrightarrow \Delta OPL = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m \text{ heltal.}$$

Toppar på ena sammanfaller
med dalar på andra.

Tunt skikt



Stråle reflekteras i olika gränssytor.

$$\Delta OPL = 2 \cdot n_s \cdot d \cdot \cos(i') + \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & \text{om en av refl. mot} \\ & \text{tätare medium} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Tätare medium $\Leftrightarrow$ större n .

ΔOPL vägställnad mellan ljus reflekterat i första resp. andra gränssytor.

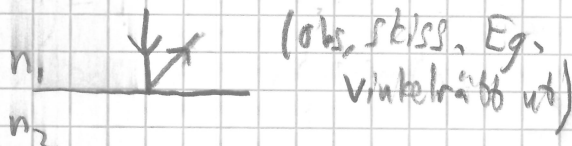
Vinkelrät reflektion i gränssytor

Reflekterat ljus

$$R = \frac{I'}{I} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

där I' är den reflekterade intensiteten, och I den inkommande intensiteten.

n_1, n_2 brytningsindex för de två materialen

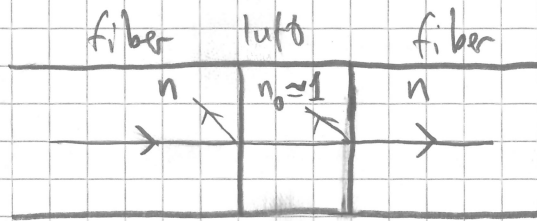


Luftspalt Givet: Luftspalt, tjocklek $d = 400 \text{ nm}$.

Fibers brytningsindex $n = 1,52$

Sök: Vilka våglängder reflekteras starkast?

Lösning: Rita!



(obs. bärn i luftströmmen.
Reflekteras eg. tillbaka
längs samma väg)

Vi ser det som ett tunt skikt! Vinkelrädd
infallande ljus $\Rightarrow$ vinkeln $i' = 0^\circ$

En av reflektionerna sker mot tätare medium, så
vi får faktorn $\lambda/2$ också.

Skillnaden i optisk väg mellan de reflekterade
strålarna blir $\Delta OPL = 2n_0d \cdot \cos(0^\circ) + \frac{\lambda}{2} = 2n_0d + \frac{\lambda}{2}$

Vi vill hitta vilka våglängder som reflekteras starkast,
I det här fallet betyder det de våglängder som
får maximal konstruktiv interferens.

Sker då $\Delta OPL = m \cdot \lambda$, m heltal.
vi får då

$$m\lambda = 2n_0d + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2n_0d}{m - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Luftspalt, så } n_0 \approx 1 \Rightarrow \lambda = \frac{2d}{m - \frac{1}{2}}$$

De första våglängderna som reflekteras starkast blir
då

$$\lambda_{m=1} = 4d = 1600 \text{ nm}$$

$$\lambda_{m=2} = \frac{4d}{3} \approx 533 \text{ nm}$$

$$\lambda_{m=3} = \frac{4d}{5} = 320 \text{ nm}$$

ofv.

Rälsörjning Givet Reflektans metall $R_m = 0,6$
Reflektans olja $R_o = 0,1$

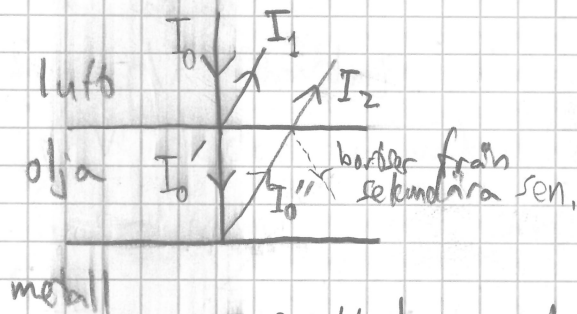
Sökt: Modulation m i interferensmönstret

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Lösning: Allmänt får man vid vinkelrät
reflektion i gränssyta $I_r = R \cdot I_i$,

där I_r är den reflekterade intensiteten, och
 I_i är den inkommande intensiteten.

Rita bild!



OBS att bara skiss; reflekteras
egentligen rakt upp.

Kommer få interferens mellan I_1 och I_2 !

Interferensen ger intensiteten som

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\Delta\phi)$$

$\Delta\phi$ fasskillnaden mellan strålarna

Vi har att $I_1 = R_o \cdot I_0$

I_2 ? För det första kommer I_0' vara den del av
 I_0 som inte reflekteras; $I_0' = (1 - R_o) \cdot I_0$

I_0' reflekteras sen i gränssidan olja - metall

$$\Rightarrow I_0'' = R_m \cdot I_0'$$

I_2 kommer vara den del av I_0'' som inte reflekteras

i gränsen olja-luft på vägen ut
 $\Rightarrow I_2 = (1-R_0) \cdot I_0''$. Vi har därmed

$$I_2 = \underbrace{(1-R_0) \cdot R_m \cdot (1-R_0)}_{= R_2 \text{ in för en konstant}} \cdot I_0 = R_2 \cdot I_0$$

Vi får då totala intensitet (med interferens) som

$$I_{\text{tot}} = R_0 \cdot I_0 + R_2 \cdot I_0 + 2\sqrt{R_0 \cdot R_2} \cdot I_0^2 \cdot \cos(\Delta\phi) \\ = I_0(R_0 + R_2 + 2\sqrt{R_0 \cdot R_2} \cdot \cos(\Delta\phi))$$

Vi vill hitta I_{max} och I_{min} för att hitta m.

cos-termen! Vi får max, då den är +1, min då -1.

$$I_{\text{max}} = I_0(R_0 + R_2 + 2\sqrt{R_0 R_2})$$

$$I_{\text{min}} = I_0(R_0 + R_2 - 2\sqrt{R_0 R_2})$$

$$\Rightarrow m = \frac{I_0(R_0 + R_2 + 2\sqrt{R_0 R_2}) - I_0(R_0 + R_2 - 2\sqrt{R_0 R_2})}{I_0(R_0 + R_2 + 2\sqrt{R_0 R_2} + R_0 + R_2 - 2\sqrt{R_0 R_2})} =$$

$$= \frac{4\sqrt{R_0 R_2}}{2(R_0 + R_2)} = \frac{2\sqrt{R_0 R_2}}{R_0 + R_2}$$

Vi har att $R_2 = (1-R_0)^2 \cdot R_m = 0,9^2 \cdot 0,6$, och

$R_0 = 0,1$. Vi får därmed den sökta modulationen

$$\text{som } m = \frac{2\sqrt{R_0 R_2}}{R_0 + R_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,9}}{0,1 + 0,6 \cdot 0,9^2} \approx 0,75$$

Vinkel-AR (antireflex, inte augmented reality)

Givet: Optimerat för inkommande vinkel $i = 45^\circ$.

Våglängd $\lambda = 550 \text{ nm}$

Brytningsindex skikt $n_s = 1,35$, substrat $n_t = 1,72$

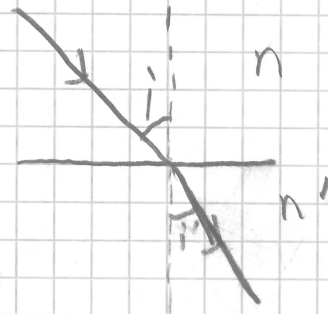
Sökt: Reflektans i noll grader.

Lösning:

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad \text{för vinkelrät reflektion i}$$

en gränzyta.

Skiktets tjocklek? Bild!



$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$$

$$\Rightarrow i' = \sin^{-1} \left(\frac{n}{n'} \cdot \sin i \right)$$

$$\text{Vi har } i = 45^\circ \Rightarrow i' \approx 31,6^\circ$$

$$n \approx 1 \text{ (luft)}$$

$$n' = n_s = 1,35$$

AR-beläggningen är optimerad för infallsvinkel 45° . Vi vill alltså ha maximal destruktiv interferens där! (så lite reflex som möjligt)

$$\Rightarrow \Delta OPL = \frac{\lambda}{2}$$

Har också att för tunt skikt så är

$$\Delta OPL = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos(i')$$

i vårt fall

(båda reflektionerna mot tätare medium (större n))

med $n = n_s$ och $i' = 31,6^\circ$. d skiktstjockleken,

Vi får därmed att

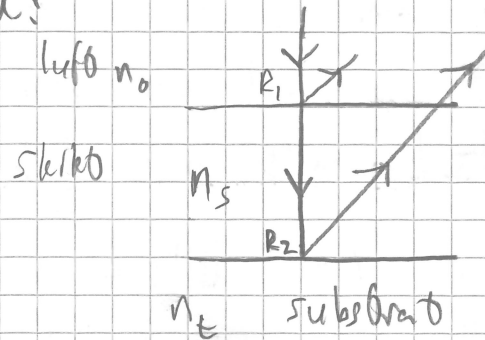
$$2 n_s \cdot d \cdot \cos(i') = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4 n_s \cdot \cos(i')} = \frac{550 \text{ nm}}{4 \cdot 1,35 \cdot \cos(31,6^\circ)}$$

$$\approx 119,6 \text{ nm}$$

Reflektansen R är direkt proportionell mot intensiteten.
Vi får därför (som i uppgiften Rättsmörjning också) totala reflektansen som

$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cdot \cos(\Delta\phi), \quad \text{där}$$

R_1 är reflektansen i första gränssnittet, och R_2 i andra. Bild:



(OBS eg. reflexer
rakt upp igen)

Fas skillnaden $\Delta\phi$?

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta OPL$$

För tunt skikt: $\Delta OPL = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos(i')$

Vi har $n = n_s$, $i' = 0^\circ$ här,

$$d = \frac{\lambda}{4n_s \cdot \cos(31,6^\circ)} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \cdot n_s \cdot \frac{\lambda}{4n_s \cdot \cos(31,6^\circ)} \cdot \cos(0^\circ)$$

$$= \frac{\pi}{\cos(31,6^\circ)} \cdot \underline{\text{OBS}} \quad \text{i} \quad \underline{\text{radianer!}}$$

R_1 och R_2 ? Använder den givna formeln!

$$R_1 = \left(\frac{n_s - n_0}{n_s + n_0} \right)^2 = \left(\frac{1,35 - 1}{1,35 + 1} \right)^2 \approx 0,0222$$

$$R_2 = \left(\frac{n_t - n_s}{n_t + n_s} \right)^2 = \left(\frac{1,72 - 1,35}{1,72 + 1,35} \right)^2 \approx 0,0145$$

Vi får då den sökta totala reflektansen som

$$R_{\text{tot}} = 0,0222 + 0,0145 + \sqrt{0,0222 \cdot 0,0145} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\cos(31,6^\circ)}\right) \approx$$

$$\approx \left\{ \text{OBS att} \right. \\ \left. \cos\text{-argumentet är i radianer} \right\} \approx \underline{\underline{0,006}}$$

Deformation Givet: Mönster, våglängd $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Ena spegeln deformerad.

Sökt: Höjdvariationerna längs svarta linjen.

Lösning: Vi har ett interferensmönster!

Maximum fås vid $\Delta OPL = m\lambda$, minimum

vid $\Delta OPL = (m + \frac{1}{2})\lambda$

Vi får att maximal destruktiv interferens sker vid avståndsskillnader på $\frac{1}{2}\lambda$.

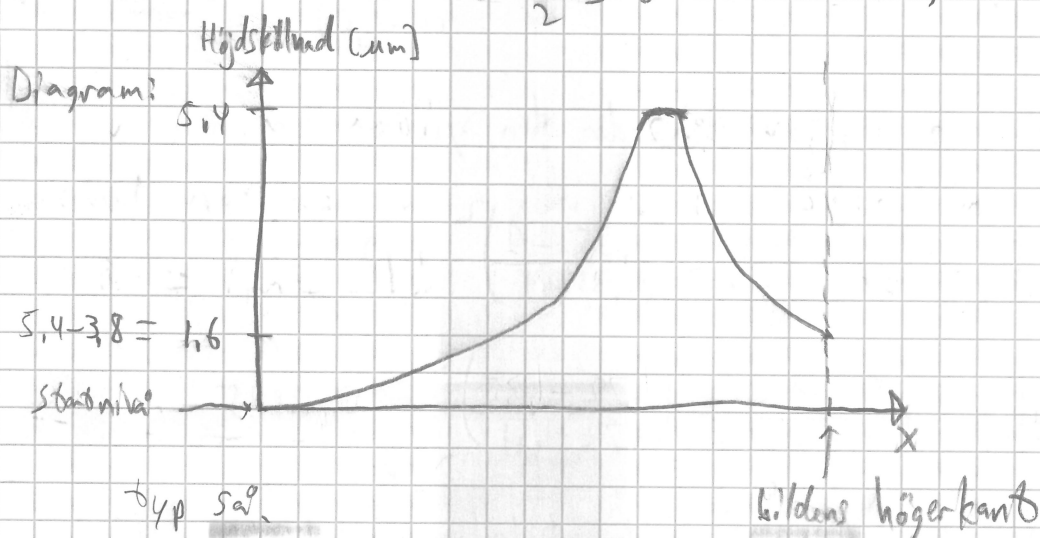
Det betyder att det i bilden är en halv våglängds skillnad mellan varje svart "nivåkurva".

Längs svarta linjen är det 17 nivåkurvor upp till toppen (eller ner i dalen).

Efter toppen/dalen är det 12 nivåkurvor till slutet av bilden.

$$17 \text{ nivåkurvor} \Leftrightarrow 17 \cdot \frac{\lambda}{2} = 85 \cdot 633 \text{ nm} \approx 5,4 \text{ } \mu\text{m}$$

$$12 \text{ nivåkurvor} \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{\lambda}{2} = 6 \cdot 633 \text{ nm} \approx 3,8 \text{ } \mu\text{m}$$



Extrauppgift

Oljestransport

Givet: Kontrollera om det finns tunt våvesskikt genom att titta på kvoten mellan reflexernas styrka för laser med $\lambda_1 = 500 \text{ nm}$ och $\lambda_2 = 800 \text{ nm}$.

Sök: Hur funkar det?

Lösning:

Tunt skikt:

$$\Delta OPL = 2 \cdot n \cdot d \cdot \cos(i) + \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om en av reflektioner mot} \\ & \text{ tätare medium} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\Delta \phi = 2\pi \cdot \Delta OPL \cdot \frac{1}{\lambda}$$

Interferens: $I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\Delta \phi)$

I_1, I_2 kommer från reflektioner i olika gränssytor.

Om vi bara har reflektion i en gränssyta så gäller att intensiteten som reflekteras är

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

Vi ser alltså att om vi bara har en yta så beror reflexernas styrka på brytningsindex, vilka bara har ett svagt våglängdsberoende.

Om vi däremot har lite våvesskikt på oljan, ett tunt skikt, så har vi två ytor som reflexer kommer ifrån. Vi får då interferens, som beror starkt på våglängd!

Kvoten för reflexernas styrka vid λ_1 och λ_2 blir alltså stor om det finns våvesskikt, och liten om bara olja! (skild från 1)

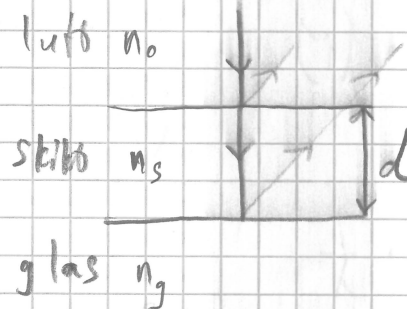
Sensor - AR Givet: Brytningsindex skikt $n_s = 1,4$.

Glas $n_g = 1,93$. Våglängd $\lambda = 628 \text{ nm}$.

Sökt: Skiktets tjocklek d .

Lösning: Vi är inte givna någon viss infallsvinkel som antireflexbeläggningen är optimerad för, så vi antar rakt inkommande ljus.

Ritar:



Båda reflektionerna mot tätare medium, så vi får för tunt skikt våglängden

$$\Delta OPL = 2 \cdot n_s \cdot d \cdot \cos(i')$$

men vi antar rakt

infallande ljus. Bryts inte i vinkel $\Rightarrow i' = 0^\circ$.

$$\Rightarrow \Delta OPL = 2 n_s d$$

Vi vill ha antireflex, så vi söker maximalt destruktiv interferens. Sker då

$$\Delta OPL = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

Kollar på $m = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 2 n_s d \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4 \cdot n_s} \quad (\text{obs, inkommande ljus i luft/skiktet})$$

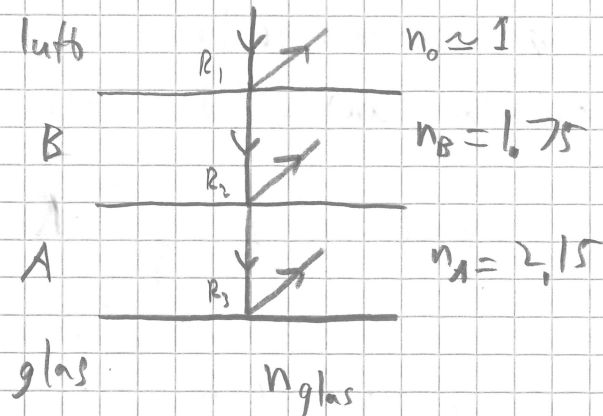
Vi får tjockleken

$$d = \frac{628 \text{ nm}}{4 \cdot 1,4} \approx \underline{\underline{112 \text{ nm}}}$$

Tvåskiktshäläggning Givet: Två material, A och B.

$n_A = 2,15$, $n_B = 1,75$. B yttre, A närmast glas.
Sökt: Bör B göras en kvarts eller en halv våglängd tjock?

Lösning: Rita en bild!



$n_{glas} \approx 1,5$ (vad vi antar här är inte så viktigt, som vi snart kommer se. Så länge större än ca 1,4)

Vi får alltså dre reflexer, som ska interagera med varandra för att ge så liten total intensitet som möjligt på det reflekterade ljuset.

Kallar reflexerna R_1, R_2, R_3 . Styrkan?

Via $R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$ Vi får

$$R_1 = \left(\frac{n_B - n_0}{n_B + n_0} \right)^2 = \left(\frac{1,75 - 1}{1,75 + 1} \right)^2 \approx 0,07$$

$$R_2 = \left(\frac{n_A - n_B}{n_A + n_B} \right)^2 = \left(\frac{2,15 - 1,75}{2,15 + 1,75} \right)^2 \approx 0,01$$

$$R_3 = \left(\frac{n_{glas} - n_A}{n_{glas} + n_A} \right)^2 = \left(\frac{1,5 - 2,15}{1,5 + 2,15} \right)^2 \approx 0,03$$

Ser att R_1 är störst. Vi vill därför motverka den med de andra två. Vi vill alltså att R_2 och R_3 ska samverka mot R_1 , för att få så liten

total reflex som möjligt.

Vi vill därför att vägskillnaden mellan 2 och 3

ska vara $\Delta OPL_{23} = m \cdot \lambda$, och

mellan 1 och 2 $\Delta OPL_{12} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$

$m \approx 0$ ger tunnast skikt.

Vi har för tunt skikt att

$$\Delta OPL = 2n_s d \cdot \cos(i') + \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & \text{om en avrefl. mot optiskt} \\ & \text{bärbare medel} \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

I det här fallet (för reflex 1 och 2) sker båda reflexerna mot optiskt bärare material, så vi får ($i' = 0$, $n_s = n_B$)

$$\Delta OPL = 2 \cdot n_B \cdot d \cdot \cos(0^\circ) = 2n_B d$$

För den samma destruktiva interferensen har

vi även att $\Delta OPL = \frac{\lambda}{2}$. Vi får därmed

$$2n_B d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{n_B} \cdot \frac{\lambda}{4} \sim \frac{\lambda}{4}$$

d är här tjockleken på skiktet B.

Vi får därmed

Svar: Skiktet B bör göras en kvarts våglängd tjockt (snarare än en halv, iallafall).
