KTH, Matematik
Erik Lindgren, Gunnel Roman,
Maria Saprykina och Ozan Öktem

**Lösningsförslag till tentamen i SF1659,
Matematik Baskurs. 5 oktober 2015**

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx. **Kompletteringen** kommer att ske 2 november 2015 kl. 8–9:30. Informationen om plats ska finnas på kurshemsidan. Skriv till Maria Saprykina (masha@kth.se) för att anmälla dig!

(1). Lös ekvationen $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5} = 1$.

Lösning: Skriver om ekvetionen: $\sqrt{3x+4} = 1 + \sqrt{x+5}$ och kvadrera båda delarna:

$$3x + 4 = (1 + \sqrt{x+5})^2 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x+5}.$$

OBS att den erhållna ekvationen är uppfylld för alla rötter till den ursprungliga, men kan ha fler rötter. Vi ska behöva testa om lösningarna till den nya ekvationen uppfyller den ursprungliga. Kvadrera båda delarna en gång till och förenkla. Vi får $x^2 - 3x - 4 = 0$. Denna ekvation har rötter $x = 4$ och $x = -1$.

Sätter in rötterna i den ursprungliga ekvationen: $x = 4$ uppfyller den, alltså är detta en rot.

Däremot, $x = -1$ uppfyller inte ekvationen.

Svar: $x = 4$.

(2). Lös ekvationen $2^{2x-1} - 5 \cdot 2^x + 12 = 0$.

Lösning: Ekvationen är ekvivalent med $\frac{1}{2}(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 12 = 0$. Om vi betecknar $z := 2^x$, så får vi $\frac{1}{2}z^2 - 5 \cdot z + 12 = 0$. Denna har lösningar $z = 4$ eller $z = 6$. I termer av x är det $x = 2$ eller $z =^2 \log 6 = \ln 6/ \ln 2$.

(3). Lös ekvationen $\cos(2x) = 3\cos x - 2$.

Lösning: Skriver om mha formeln för dubbla vinkeln:

$$2\cos^2 x - 1 = 3\cos x - 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Detta är en andragradsekvation för $\cos x$. Vi får lösningar $\cos x = 1$ och $\cos x = 1/2$.

Vidare, $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, och
$\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4). Lös olikheten $\dfrac{x+3}{x+2} \leq x - 1$

Lösning: Olikheten är ekvivalent med

$$\frac{x+3}{x+2} - (x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{x+2} \leq 0.$$

Observera att $-\sqrt{5} < -\sqrt{4} = -2$ För att undersöka för vilka x olikheten är uppfylld, gör vi ett teckentabell:

x		$-\sqrt{5}$		-2		$\sqrt{5}$	
$\sqrt{5}-x$	+		+		+	0	-
$\sqrt{5}+x$	-	0	+		+		+
$x+2$	-		-	0	+		+
$\frac{(5-x^2)}{(x+2)}$	+	0	-	ej def	+	0	-

Från detta följer att olikheten är uppfylld för x som uppfyller $-\sqrt{5} \leq x < -2$ eller $x \geq \sqrt{5}$.

(5.) Lös ekvationen $|x+1| + |2x-6| = 10$.

Lösning: Det finns två punkter där uttrycken inom absolutbeloppstecknen ändrar tecken: $x = -1$ och $x = 3$. Vi betraktar 3 fall.
Fall 1: $x < -1$. Här $|x+1| = -(x+1)$, och $|2x-6| = -2(x-3)$. I detta intervall kan ekvationen skrivas som

$$-(x+1) - 2(x-3) = 10 \Leftrightarrow -3x + 5 = 10 \Leftrightarrow x = -5/3.$$

$-5/3 < -1$, alltså är detta en rot.
Fall 2: $-1 \leq x < 3$. Här $|x+1| = (x+1)$, och $|2x-6| = -2(x-3)$. I detta intervall kan ekvationen skrivas som

$$x + 1 - 2(x-3) = 10 \Leftrightarrow -x + 7 = 10 \Leftrightarrow x = -3.$$

-3 ligger inte i intervallet $-1 \leq x < 3$, alltså ingen rot.
Fall 3: $x \geq 3$. Här $|x+1| = (x+1)$, och $|2x-6| = 2(x-3)$. I detta intervall kan ekvationen skrivas som

$$x + 1 + 2(x-3) = 10 \Leftrightarrow 3x - 5 = 10 \Leftrightarrow x = 5/3.$$

$x = 3/5$ uppfyller inte $x \geq 3$, alltså ingen rot.

Svar: $x = -5/3$.

(6). Summan av de två första termerna i en geometrisk talföljd är 10, och summan av de tre första termerna är 19. Bestäm talföljden.

Lösning: Låt a beteckna första termen i talföljden, och k beteckna kvoten. De två talen tilsammans definierar talföljden, och de är dem vi ska bestämma.

Vi vet att $a + ak = a(k+1) = 10$, och $a + ak + ak^2 = 19$. Sätter detta i ett system:

$$\begin{cases} a(k+1) = 10 \\ a(1+k+k^2) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(k+1) = 10 \\ ak^2 = 9. \end{cases}$$

Detta ger: $a = 9/k^2$ och $\frac{k+1}{k^2} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow 10k^2 = 9(k+1) \Leftrightarrow 10k^2 - 9k - 9 = 0$. Vi har $k = 3/2$ eller $k = -3/5$.

För $k = 3/2$ blir $a = 9/k^2 = 4$. Följden blir: $4,\ 6,\ 9, \ldots$

För $k = -3/5$ blir $a = 9/k^2 = 25$. Följden blir: $25,\ -15,\ 9, \ldots$

Svar: Två följder: $k = 3/2$, $a = 4$, samt $k = -3/5$, $a = 25$.

(7). Lös ekvationen $(\sin(\arctan x))^{-2} - (\tan(\arcsin x))^{-2} = 4x$.

Lösning: Först förenklar vi vänsterledet. Låt $\arctan x = \alpha$. Då $\tan\alpha = x$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Antag först att $\alpha \in (0, \pi/2)$. Då har vi $x = \tan\alpha > 0$. Rita en rät triangel med en av vinklarna α and $\tan\alpha = x$ (tex med kateterna x och 1). Hypotenusen är $\sqrt{1+x^2}$. Från denna ser vi att $\sin(\arctan x) = \sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Antag nu att $x < 0$. Då är $(-x) > 0$, och formeln ovan gäller för $(-x)$.

$$\sin(\arctan(x)) = \sin(-(\arctan(-x))) = -\sin(\arctan(-x))) = -\frac{(-x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

alltså gäller formeln för $x < 0$ också. Vi måste bertakta $x = 0$ separat. För $x = 0$ har vi division med 0 i den ursprungliga ekvationen, så det är ingen rot.

På samma sätt får man att $(\tan(\arcsin x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ för $x \neq 0$.

Sätter in i ekvationen: $\frac{1+x^2}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = 4x$.

Svar: $x = 1/2$.

(8). Bestäm summan av alla tal mellan 99 och 300 som ej är delbara med 3.

Lösning: Betrakta följd av 201 tal: $100, ...300$ (jag tar inte 99 med eftersom den delas med 3, och inte räknas med i svaret på den ursprungliga frågan). Det finns exakt $201/3 = 67$ triader; det sista talet i varje triad delas med 3, de andra två—inte. Först låt oss hitta summan av de som *delas* med 3. Den är

$$\sum_{k=1}^{67}(99+3k) = 99 \cdot 67 + 3\sum_{k=1}^{67} k = 99 \cdot 67 + 3\frac{67 \cdot 68}{2} = 99 \cdot 67 + 3 \cdot 67 \cdot 34 = 201 \cdot 67.$$

Summan av alla tal $100, ...300$ är $\sum_{k=100}^{300} k = 200 \cdot 201$. Alltså summan av de som inte delas med 3 är $200 \cdot 201 - 201 \cdot 67 = 133 \cdot 201 = 26733$.

(9). Avgör om funktionen $f(x) = e^{2\sqrt{x-1}} + e^{\sqrt{x-1}} - 1$ är inverterbar. Om så är fallet, finn dess invers.

Lösning: Ja, funktionen är inverterbar. Ett sätt att se det är att observeta att funktionen $g(x) = \sqrt{x-1}$ är strängt växande (på $x \geq 1$), exponentialfunktionen är strängt växande; komposition och summa av strängt växande funktioner är strängt växande, alltså är funktionen $f(x)$ strängt växande, och därför inverterbar.

Observera att $f(x)$ är definierad på $x \geq 1$. För att hitta invers låt $y = f(x)$. Om vi betecknar $z := e^{\sqrt{x-1}}$ (observera att $z \geq 0$), får vi ekvationen för att uttrycka z i termer av y:

$$z^2 + z - 1 = y \Leftrightarrow z^2 + z - (1+y) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{5/4 + y)}.$$

Ve behöver $z \geq 0$ och det är bara $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{5/4+y}$ som är positiv. Vi löser ut z ur $z = e^{\sqrt{x-1}}$:

$$\sqrt{x-1} = \ln(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4} + y) \Leftrightarrow x = 1 + (\ln(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4+y)})^2.$$

Svar: $f^{-1}(x) = 1 + (\ln(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4+x}))^2$.