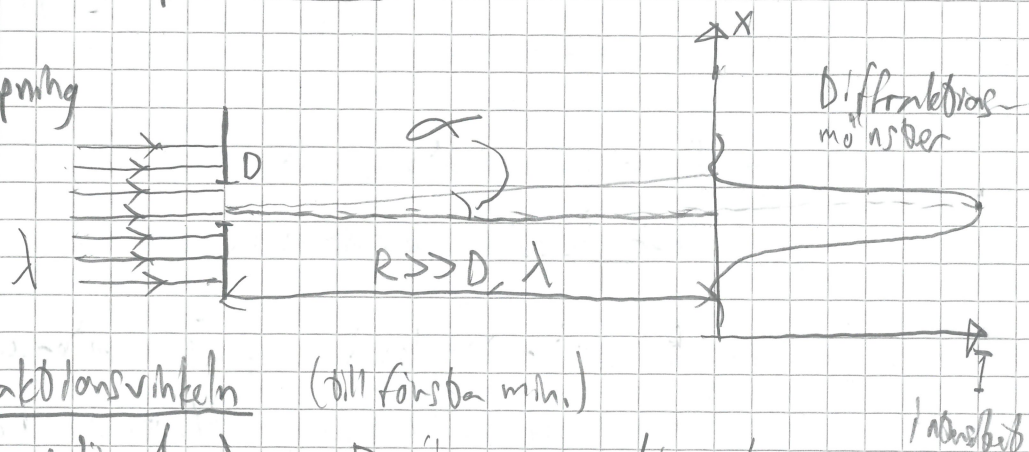


Övning 9

Håkan Wennlöf
hennlot@kth.se

Diffraction och polarisation

• Cirkulär öppning



α diffraktionsvinkeln (till första min.)

Ljus med våglängd λ . D öppningens diameter.

$$\sin \alpha = \frac{1,22 \lambda}{D}$$

• Enkelspalt. Diffraktionsmönster i bara en riktning

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a}, \quad a \text{ spaltbredd,}$$

• Upplösning. Vinkeln av synfältet som går att upplösa (dvs när man kan skilja en punkt från en annan) ges av Rayleighkriteriet

$$\sin \alpha_R = \frac{1,22 \lambda}{D}$$

(ögar cirkulär öppning, därav likheten).

• Gitter. Får diffraktionsmönster endast i vissa bestämda riktningar (ordningar). Vinkeln α_m till ordning m ges av

$$m \cdot \lambda = d \cdot \sin(\alpha_m), \quad m \text{ heltal.}$$

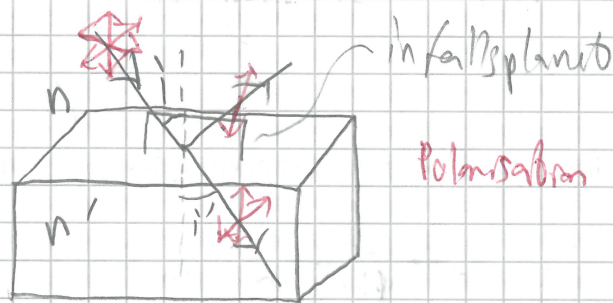
d gitterkonstant (spaltseparationen).

• Polarisation

- Ljus polariseras vid reflektion.
Viss polarisation ger starkare reflektion än andra.

- Polarisationsriktning är riktningen E -fältet hos ljuset varierar i.

- Brewstervinkeln: i Brewstervinkeln i_B (infallande vinkel) reflekteras bara polarisationen vinkelrät mot infallsplanet.



i_B ges av $\tan(i_B) = \frac{n'}{n}$

DPI Givet: Beträktas med $\alpha \approx 10^\circ$ akkomodation,
pupilldiameter $d = 2 \text{ mm}$.

Sökbi Största relevanta DPI.

Lösning: Akkomodation är fenomenet att ögat justerar sin brytning för att se skarpt på olika avstånd.
Givet i dioptrier, är som linsstyrka.

En dioptri är styrkan hos en lins med fokallängd en meter. Allmänt ges styrkan av $\alpha = \frac{1}{f}$.

I vårt fall får vi alltså att

$$f = \frac{1}{10} \text{ m} = 100 \text{ mm}$$

Ögat är inställt på att fokusera på ett avstånd på 100 mm.

Två objekt är upplästa om de har en vinkel α_R av synfältet mellan sig, given av $\sin \alpha_R = \frac{1,22 \lambda}{d}$

λ våglängden, d diametern på den cirkulära öppningen.

λ ? Synligt ljus ligger mellan typ 400 - 700 nm.

Vi måste anta nåt... antar $\lambda = 550 \text{ nm}$ (grönt, typ)

Vi har att $d = 2 \text{ mm}$.

Liten vinkel! (mellan två punkter på ett papper 100 mm bort liksom, och så litet avst. att man precis kan skilja på dem). $\Rightarrow \sin \alpha_R \approx \alpha_R$.

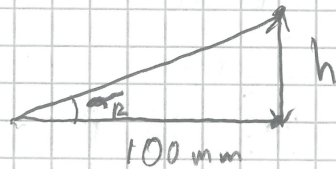
$$\Rightarrow \alpha_R \approx \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \approx 0,34 \text{ mrad}.$$

(för samma om vi tar $\sin^{-1}$ av det.)

Det är alltså den minsta synvinkel som går att

upplösa för ögat.

Vi vill veta vilket avstånd mellan två objekt (dots) det motsvarar för en betraktare 100 mm bort.



$$\begin{aligned} \text{Liten vinkel} &\Rightarrow \alpha_R \approx \frac{h}{100 \text{ mm}} \Rightarrow h = 100 \text{ mm} \cdot \alpha_R \\ &\Rightarrow h \approx 34 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Det är alltså 34 μm mellan punkter.

Punktdensiteten ges därmed av

$$s = \frac{1}{34 \mu\text{m}} \approx 30\,000 \text{ punkter/m} = 30 \text{ dots/mm}.$$

Vi vill ha dots per inch.

En inch är 25,4 mm, så vi får

$$s = 30 \frac{\text{dots}}{\text{mm}} \cdot 25,4 \frac{\text{mm}}{\text{inch}} \approx \underline{\underline{760 \text{ DPI}}}$$

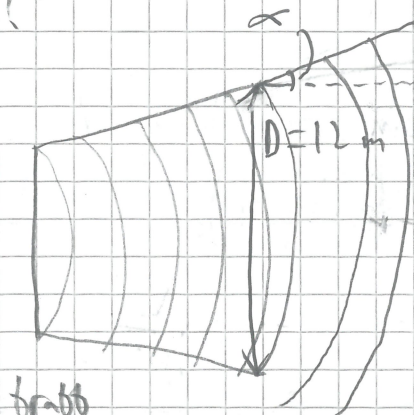
Svar: Den högsta DPI som kan upplösas (och därmed den högsta det kan vara relevant att ha) på ett avstånd av 100 mm är 760 DPI.

Jättemegafon Ginebi Trätt, diameter $D = 12 \text{ m}$,

Musik med frekvens $f = 115 \text{ Hz}$.

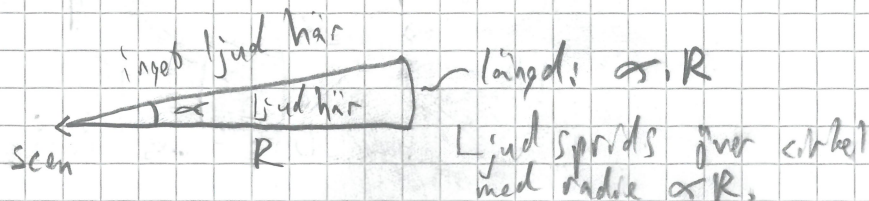
Sök: Hur många dB vinner man i framförkänningen?

Lösning: Rita!



En ljudvåg skulle, om trätten inte fanns, spridas över en sfär. Med trätten så kommer vågen bara spridas över en viss vinkel, som ges av diffraction!

På avst. R :



Vi söker skillnaden i ljudintensitet:

$$\Delta B = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \text{ dB}$$

I_1 intensiteten utan kons. På avst. R från scenen får vi

$$I_1 = \frac{P}{4\pi R^2}, \quad \text{där } P \text{ är den utsträdda effekten.}$$

I_2 är intensiteten för det riktade ljudet.

Arean som effekten sprids på beror då på vinkeln α enligt $A = \pi \cdot (\alpha \cdot R)^2$.

$$\text{Vi får } I_2 = \frac{P}{\pi \alpha^2 R^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{P}{\pi \alpha^2 R^2}}{\frac{P}{4\pi R^2}} = \frac{4}{\alpha^2}$$

2? För cirkulär öppning har vi

$$\sin \alpha = \frac{1,22 \lambda}{D}$$

Behöver λ !

Vi har frekvensen,

Allmänt gäller $\lambda = \frac{c}{f}$, där c är vågens

hastighet. Vi har ljudvåg i luft, så $c \approx 340 \text{ m/s}$.

Vi får $\lambda = \frac{340 \text{ m/s}}{115 \frac{1}{s}} \approx 3 \text{ m}$.

Diffraktionsvinkeln α blir då (cirkulär öppning)

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1,22 \cdot \lambda}{D}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1,22 \cdot 3 \text{ m}}{12 \text{ m}}\right) \approx 0,31 \text{ rad} \\ \approx 17,5^\circ$$

Vi får då $\frac{I_2}{I_1} = \frac{4}{\alpha^2} = \frac{4}{0,31^2} \approx \underline{\underline{42,9}}$.

Intensiteten ökar alltså med en faktor 42,9!

Vi vill ha decibelökningen:

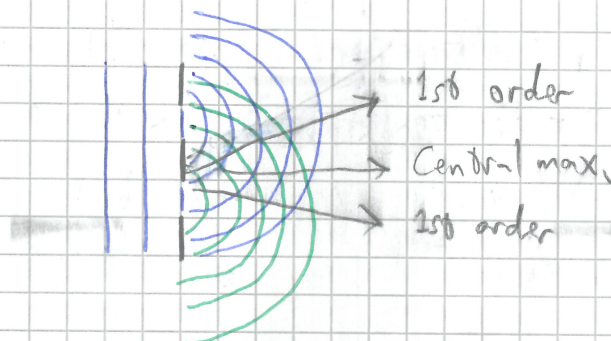
$$\Delta B = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10 \cdot \log_{10}(42,9) \approx \underline{\underline{16,3 \text{ dB}}}$$

Svar: Man vinner 16,3 dB i framförhållningen.

Laserkras Givet: 25 strålar, $\lambda = 633 \text{ nm}$,
spridas i vinkel $\pm 20^\circ$. Vår gitter,

Sökt: Linjebredd och spaltbredd. Nackdel?

Lösning: Rita!



Gitter. Gitterkonstant / spaltbredd d .

Strålar går i vissa riktningar. Vi vill ha
25 strålar, och alltså 12 ordningar

(finns två strålar per ordning, och en centralstråle),
(strålar där konstruktiv interferens)

Vinklarna strålarna går ut från centrum med
ges av

$$m\lambda = d \cdot \sin \alpha_m, \text{ där } m \text{ betecknar ordningen.}$$

Vi vill att strålarna ska spridas i $\pm 20^\circ$.

Det betyder att vid $m=12$ ska α_{12} vara $\alpha_{12} = \pm 20^\circ$. (yttre strålen vid 20°).

Vi kan då hitta spaltavståndet d .

$$12\lambda = d \cdot \sin(\alpha_{12}) \Rightarrow d = \frac{12\lambda}{\sin(\alpha_{12})} = \frac{12 \cdot 633 \text{ nm}}{\sin(20^\circ)} \approx 22 \mu\text{m}.$$

Linjebredd blir då

$$g = \frac{1}{22 \mu\text{m}} \approx 45\,000 \text{ linjer/m} = 45 \text{ linjer/mm},$$

(annat mätt på gitter, bara)

Nackdel? Nackdelen främst är att linjerna längre
ut blir svagare.

Ljussäck! Givet: Kallt väder, ljussäck bildas över
gatulampa, Reflektion i små svävande isplattor.

Sökt: I vilken riktning är ljuset polariserat? Varför?

Lösning: För att få vertikala säck måste isplattorna
ligga horisontellt. Om vertikalt:

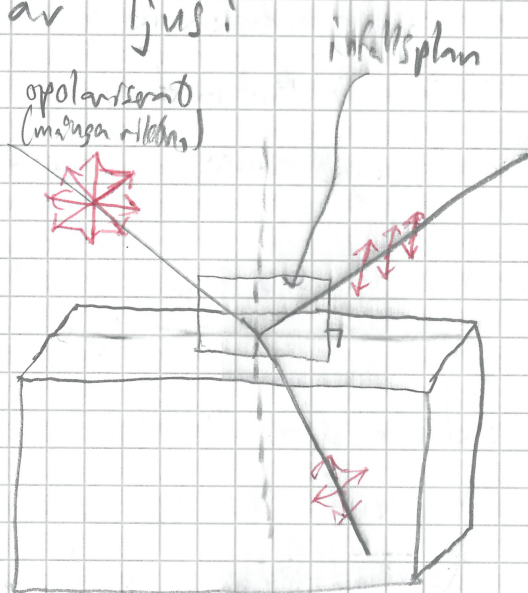


Horisontellt bälte.



ingen oen att
reflekteras
på likasam

Reflektion av ljus:



Vid reflektion reflekteras vågor med polarisation
vinkelrätt mot infallsplanet starkast.

I det här fallet
är infallsplanet



vertikalt. Det reflekterade ljuset blir
därför till största del horizontalpolariserat.

Extravuppgifter

Solljusgitter Givet Hela första ordningen av synligt
ljus (400-700 nm) synligt vid vinkelrätt infall.

Sök Antal ränder per millimeter (dvs linjetätheten,
dvs $1/\text{gitterkonstanten}$)

Lösning Vi har för gitter att

$m\lambda = d \cdot \sin \alpha_m$, där m är ordningen,
och α_m vinkeln till ordning m . d gitterkonst.

Vi vill titta på första ordningen, så

$$\lambda = d \cdot \sin \alpha_1 \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin \alpha_1}$$

Rött ljus ($\lambda = 700 \text{ nm}$) sprids mest, så

vi använder det för dimensionering.

Vi vill att hela första ordningen ska synas.

Rött ljus, som sprids mest, får därför ha vinkeln $\alpha = 90^\circ$.

Vi får därmed att

$$d = \frac{700 \text{ nm}}{\sin(90^\circ)} = 700 \text{ nm}.$$

Antal ränder per längd ges av

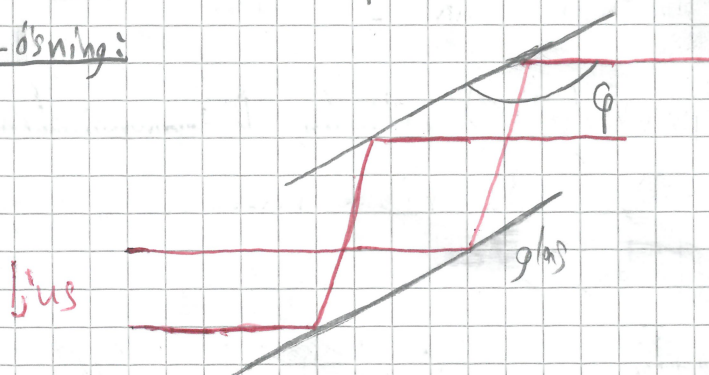
$$g = \frac{1}{d} = \frac{1}{700 \text{ nm}} \approx 1430 \text{ ränder/mm}.$$

Polarisationsperiskop Givet: en polarisationsriktning i objekt.

Glasplattor, $n = 1,55$.

Sökt: Vinkeln ϕ .

Lösning:



Vi vill ha en polarisationsriktning i objekt.

För att få det måste infallsvinkeln vara lika med Brewstervinkeln. Där reflekteras bara polariserat ljus vinkelrätt mot infallplanet. Brewstervinkeln i_B ges av

$$\tan(i_B) = \frac{n'}{n}, \quad \text{där } n' \text{ är brytningsindex för material}$$

strålarna reflekteras mot, och n brytningsindex för mtrl. strålar kommer från.

Ritar:



vi söker ϕ !

Vill att $i = i_B$.

Får då att $\phi = i + 90^\circ = i_B + \phi$.

Söker därför i_B !

$$i_B = \sin^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{kommer från} \\ \text{lufte} \Rightarrow n \approx 1 \end{array} \right\} = \tan^{-1}\left(\frac{1,55}{1}\right)$$
$$\approx \underline{\underline{57^\circ}}$$

Vi får då svaret

$$\varphi = 57^\circ + 90^\circ = \underline{\underline{147^\circ}}$$

Ultraljudsmörning Givet: Frekvens $f \approx 1 \text{ MHz}$

Söker: Går det att rikta? Hur stor måste sändaren vara, i så fall?

Lösning: Antar att vi har cirkulär öppning.

Vi får då $\sin \alpha = \frac{1,22 \lambda}{D}$, där

α är diffractionsvinkeln, λ våglängden, D öppningens diameter.

För att det ska gå att rikta måste den här ekvationen vara lösbar, dvs $\frac{1,22 \lambda}{D} \leq 1$.

Om $= 1$ så blir $\alpha = 90^\circ$, vilket betyder att det sprids i en halvkula, så ändra inte riktb.

1? $\lambda = \frac{c}{f}$. Ljud $\Rightarrow c = 340 \text{ m/s} \Rightarrow \lambda = \frac{340 \text{ m/s}}{10^6 \frac{1}{s}} = 0,34 \text{ mm}$

Vi har att $D \geq 1,22 \lambda \Rightarrow D \geq 4,2 \text{ mm}$ för att få någon riktnng på ultraljudet.

Så svaret är ja, det går att rikta.

Med t.ex. diameter $D = 3 \text{ cm}$ får vi en spridning

på $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1,22 \cdot 0,34 \text{ mm}}{30 \text{ mm}}\right) \approx 0,8^\circ \approx 10 \text{ mrad}$, dvs

väldigt riktat!
