

Övning 10

Håkan Wennlöf
hwennlof@kth.se

Tenda 130530

At Givet: Kapacitans mellan två kvadratiska plattor. En roteras 45° .

Sök: Hur många procent ändras kapacitansen?

Lösning: Plattkondensator!

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

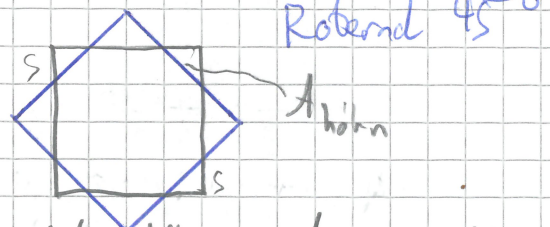
A effektiva plattarean,
d avst. mellan.

Det som ändras vid en rotation är A.

Procentuella förändringen ges av

$$\frac{C_{\text{efter}} - C_{\text{före}}}{C_{\text{före}}} = \frac{A_{\text{efter}} - A_{\text{före}}}{A_{\text{före}}}$$

Plattorna kvadratiska. Kallar sidan $s \Rightarrow A_{\text{före}} = s^2$.
Rita bild för A_{efter} !



Hörnarna som sticker ut tillhör inte längre den effektiva arean! De påverkar inte kapacitansen längre.

$$\Rightarrow A_{\text{efter}} = A_{\text{före}} - 4 \cdot A_{\text{hörn}}$$

Hörnarna består av rätvinkliga triangler, och ytan:

$$\underbrace{\text{sidan}}_a + \underbrace{\text{hypotenusan}}_{\sqrt{2} \cdot a} + \underbrace{\text{sidan}}_a = s, \Rightarrow a = \frac{s}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\text{Arean } A_{\text{hörn}} = \frac{a^2}{2} = \frac{s^2}{2(4 + 4\sqrt{2} + 2)} = \frac{s^2}{4(2 + 2\sqrt{2} + 1)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{\text{efter}} &= A_{\text{före}} - 4 \cdot A_{\text{hörn}} = s^2 - \frac{s^2}{2 + 2\sqrt{2} + 1} = s^2 \left(1 - \frac{1}{2 + 2\sqrt{2} + 1} \right) \\ &= s^2 (2\sqrt{2} - 2). \end{aligned}$$

Vi får därmed procentuella förändringen som

$$\frac{A_{\text{eff}} - A_{\text{före}}}{A_{\text{före}}} = \frac{5^2(2\sqrt{2} - 2) - 5^2}{5^2} =$$

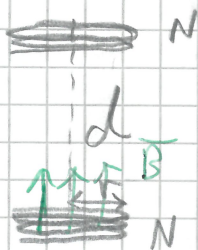
$$= 2\sqrt{2} - 3 \approx -0,17 = -17\%$$

Svar: Kapacitansen minskar med 17%

A2 Givet: Två konc. spolar, $N = 100$ varv,
radie $r = 50$ mm, avstånd mellan $d = 2,0$ m,
Samma symmetriaxel.

Sök: Ömsesidiga induktansen!

Lösning:



Ömsesidig induktans: $M = N_1 \frac{\Phi_1}{I_2}$

$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$, där $\vec{B}$ är yttre magnetfältet,
I det här fallet: $\Phi_1 = A_1 B_2$, där A_1 är
area för spole 1, och B_2 magnetfält för
spole 2 (magn. fält skapat av spole 2).
Vinkelräta, så $\vec{A}_1 \cdot \vec{B}_2 \rightarrow A_1 B_2$.

$A_1 = \pi r^2$ (cirkulär spole).

Magn. fält från konc. spole:

$B = \frac{N \mu_0 I_2 r^2}{z(r^2 + z^2)^{3/2}}$, där z är position längs
symmetriaxeln.

I vårt fall: Vill kolla B_2 i spole 1, dvs
på $z = d$. Vi får därför

$B_2 = \frac{N \mu_0 I_2 r^2}{z(r^2 + d^2)^{3/2}}$, och ömsesidiga induktansen

$$M = N_1 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot \frac{\mu_0 I_2 \cdot r^2}{2(r^2+d^2)^{3/2}}}{I_2} = \left\{ \begin{matrix} N_1 = N_2 \\ d \gg r \Rightarrow (r^2+d^2)^{3/2} \approx d^3 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\pi N^2 \mu_0 \cdot r^4}{2 d^3} = \frac{\pi \cdot 100^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot (50 \cdot 10^{-3} m)^4}{2 \cdot (2,0 m)^3}$$

$$\approx \left\{ [H] = \frac{J}{A^2} = \frac{Nm}{A^2} \right\} \approx \underline{\underline{15 \text{ nH}}}$$

A3 Givet: Kvadratiskt rum, $10 \times 10 \text{ m}$, 3 m takhöjd.
Fläktar i hörnen. En fläkt ger 28 dB mitt i rummet.
Frekvens $f \approx 500 \text{ Hz}$.

Sök: Antal dB i mitten av rummet av alla fyra fläktar!

Lösning: Fläktarna är inte koherenta, de avger vad som kallas buller. Att de inte är koherenta betyder att det inte blir interferens.

Totala intensiteten i mitten av rummet blir därför bara summan av intensiteterna för de fyra fläktarna.

Ljudintensitetsnivå (dB) ges av

$$B = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$\Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{B/10}$$

En ökning av intensiteten med en faktor 4 ger

$$B' = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{4I}{I_0} \right) = \left\{ \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \right\} = 10 \cdot \log_{10}(4) + 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$= B + 10 \cdot \log_{10}(4)$$

En ökning med faktor 4 i intensiteten motsvaras alltså av en ökning med $10 \cdot \log_{10}(4) \text{ dB} \approx 6 \text{ dB}$.

Med en fläkt har vi 28 dB . Med fyra får vi 4 ggr högre intensitet $\Rightarrow$

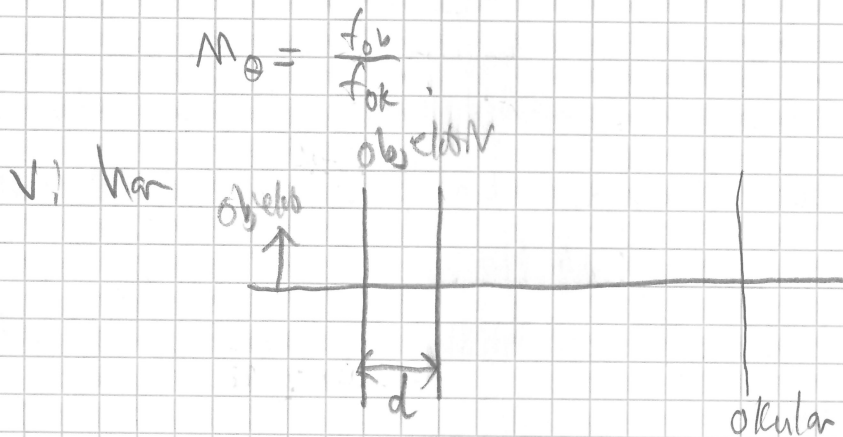
Svar: $28 + 6 = 34 \text{ dB}$ i mitten av rummet!

A4 Givet: Två linser; $f_1 = 100 \text{ mm}$, $f_2 = -40 \text{ mm}$
 Avst. mellan ändras från 80 mm till 70 mm.

Sök: Hur många gånger zoom är detta?

Lösning: Zoom?

Förstärkning! Vinkelförstärkning.



V: h/bo

$$\frac{M_\theta'}{M_\theta}$$

M_θ vid $d = 80 \text{ mm}$,
 M_θ' vid $d = 70 \text{ mm}$.

$f_{ob} = \text{systemfokallängden!}$

f_{ok} konst.

$$\Rightarrow \frac{M_\theta'}{M_\theta} = \frac{\frac{f_{ob}'}{f_{ok}}}{\frac{f_{ob}}{f_{ok}}} = \frac{f_{ob}'}{f_{ob}}$$

Systemfokallängd:

$$\frac{1}{f_{sys}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$\Rightarrow \frac{M_\theta'}{M_\theta} = \frac{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d'}{f_1 f_2} \right)^{-1}}{\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \right)^{-1}} = \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 100 \text{ mm}, f_2 = -40 \text{ mm} \\ d' = 70 \text{ mm}, d = 80 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\frac{1}{100 \text{ mm}} - \frac{1}{40 \text{ mm}} + \frac{80 \text{ mm}}{100 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}}}{\frac{1}{100 \text{ mm}} - \frac{1}{40 \text{ mm}} + \frac{70 \text{ mm}}{100 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}}} = \underline{\underline{2}}$$

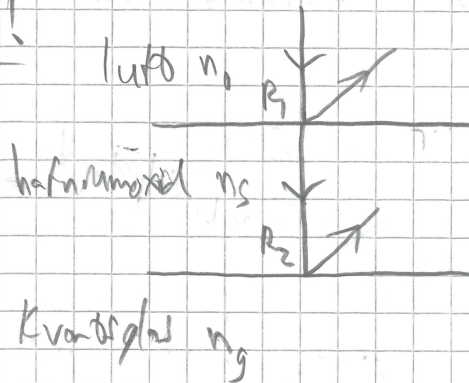
Dvs 2 ggr zoom!

AS Givet Kvantglas $n_g = 1,46$. Lager ha SnO_2 med $n_s = 2,8$.

Sök: Maximal reflektans.

Lösning:

Rita!



$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + 2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot \cos(\Delta\phi)$$

$\Delta\phi$ beror på skiljelinjernas tjlek. Gärna att den väljs så att reflektansen blir maximal!

Dvs $\cos$ -termen blir 1.

Vi får $R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + 2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2}$

Reflektans? Vill uppskatta barn, så antar vinkelrätt infall!

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \Rightarrow R_1 = \left(\frac{n_s - n_0}{n_s + n_0} \right)^2 = \left(\frac{2,8 - 1}{2,8 + 1} \right)^2 \approx 0,22$$

$$R_2 = \left(\frac{n_g - n_s}{n_g + n_s} \right)^2 = \left(\frac{1,46 - 2,8}{1,46 + 2,8} \right)^2 \approx 0,099.$$

Vi får därmed

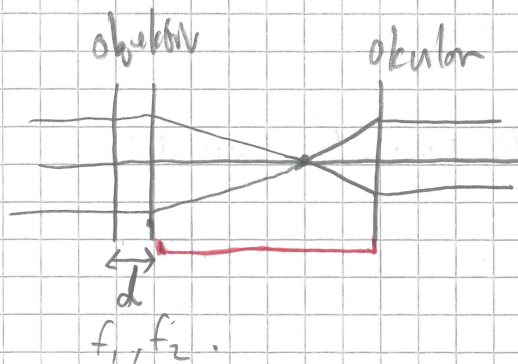
$$R_{\text{max}} = R_1 + R_2 + 2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2} = 0,22 + 0,099 + 2 \cdot \sqrt{0,22 \cdot 0,099} \approx 0,62$$

B1 (130530) Givet: Två linser, $f_1 = 100 \text{ mm}$, $f_2 = -40 \text{ mm}$.

Ska användas som objektiv i kamera.

Sökt: Inom vilka gränser kan avst. mellan dem variera för att det ska funka?

Lösning: Kamera! Vill ha afokalt system.



$\Rightarrow$ Ska ha gemensamt fokus!

För att objektiv och okular ska kunna ha fokus i samma punkt så måste fokus för objektiv ligga mellan objektiv och okular, dvs efter sista linsen ($f = -40 \text{ mm}$). Se röda omr. i figur. Vi har objektivets fokallängd som

$$\frac{1}{f_{ob}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad \text{Vill att } f_{ob} \geq d.$$

$$\Rightarrow f_{ob} = \left(\frac{f_2 + f_1 - d}{f_1 f_2} \right)^{-1} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

$$\Rightarrow d \leq \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \Rightarrow \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} - d \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f_1 f_2 + d^2 - (f_1 + f_2)d}{f_1 + f_2 - d} \geq 0$$

$$\text{Har att } (d - f_1)(d - f_2) = d^2 - (f_1 + f_2)d + f_1 f_2$$

$$\Rightarrow \frac{(d - f_1)(d - f_2)}{f_1 + f_2 - d} \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(d-f_1)(d-f_2)}{d-f_1-f_2} \leq 0$$

Ser att vi har likhet i $d=f_1$ och $d=f_2$. MEN $f_2 = -40 \text{ mm}$.
 d ett avstånd, så måste vara positivt!

Med siffrorna insatta får vi villkoret

$$\frac{(d-100 \text{ mm})(d+40 \text{ mm})}{d-60 \text{ mm}} \leq 0$$

Ser att om $d \geq 60 \text{ mm}$ men mindre än 100 mm så blir hela grejen ≤ 0 !
 (likhet då $d=100 \text{ mm}$).

Kan vara nice att rita graf i räknaren.

Vi får alltså svaret:

Avst. d måste vara

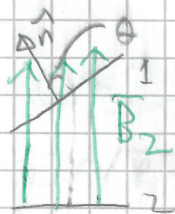
$$60 \text{ mm} < d \leq 100 \text{ mm},$$

B2 Ena spolen kan vrida sig.

Sökt: Relativa fel i vinkel och ömsesidig induktans?

Lösning: Vi har ömsesidig induktans

$$M = N_1 \frac{\Phi_1}{I_2} \quad , \quad \Phi_1 = \vec{A}_1 \cdot \vec{B}_2 = A_1 B_2 \cos \theta$$



$$\Rightarrow M = N_1 \frac{A_1 B_2}{I_2} \cdot \cos \theta = \left\{ \frac{N_1 A_1 B_2}{I_2} = M_0, \text{ konstant} \right\} = M_0 \cos \theta.$$

relativt fel? $\frac{\Delta \theta}{\theta}$ och $\frac{\Delta M}{M}$ är det vi söker!

Och förh. mellan

Derivera M m.a.p. θ !

$$\Rightarrow \frac{dM}{d\theta} = -M_0 \cdot \sin \theta \quad \text{"multiplicera med } d\theta\text{"}$$

$$\Rightarrow dM = -M_0 \cdot \sin \theta d\theta.$$

Dividera båda led med M , $M = M_0 \cdot \cos \theta$

$$\Rightarrow \frac{dM}{M} = - \frac{M_0 \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{M_0 \cdot \cos \theta} = - \tan \theta \cdot d\theta$$

$dM \rightarrow \Delta M$, $d\theta \rightarrow \Delta \theta$ (derivata är ju bara $\frac{\Delta M}{\Delta \theta}$, fast pyttesmå element)

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{M} = - \tan \theta \cdot \Delta \theta$$

Vi får alltså att de relativa felen i M och θ förhåller sig som

$$\frac{\Delta M}{M} = - \frac{\Delta \theta}{\theta} \cdot \theta \cdot \tan \theta$$

B3 Givet: Tvärskiktbeläggning.

Hafniumoxid, $n_s = 2,8$

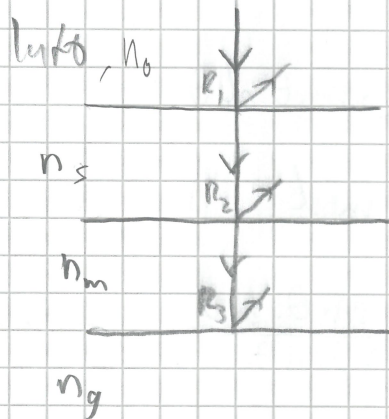
Magnesiumoxid, $n_m = 1,35$

glas, $n = 1,70$.

Sökt: Maximal reflektans!

Lösning: Maximal färd vid konstruktiv interferens av alla reflexerna!

Rita



R_1, R_2 och R_3 ska samverka!

Vi har för två reflexer att

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + 2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot \cos(\Delta\varphi)$$

Maximalt: $\cos\text{-termen} = 1$,

Vi betraktar först R_1 och R_2 !

Den resulterande totala reflektansen ska
samma samverka med R_3 för att ge
maximala totala!

Vi får att R_{12} (R_{tot} för 1 och 2, maximal, blir)

$$R_{12} = R_1 + R_2 + 2 \cdot \sqrt{R_1 \cdot R_2}$$

Den totala blir en maximal när R_{12} interfererar
med R_3 maximalt konstruktivt! Vi får

$$R_{\text{tot}} = R_{12} + R_3 + 2\sqrt{R_{12} \cdot R_3}$$

$$\Rightarrow R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 + R_3 + 2\sqrt{R_1 \cdot R_2} \cdot 2\sqrt{R_1 R_3 + R_2 R_3 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cdot R_3}$$

Typ läsovet att sätta siffror på R_{12} och R_3 ,
sen räkna ut.

$$\text{Vi har: } R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

$$\Rightarrow R_1 = \left(\frac{n_s - n_0}{n_s + n_0} \right)^2 \approx 0,22 \quad ; \quad R_2 = \left(\frac{n_m - n_s}{n_m + n_s} \right)^2 \approx 0,12$$

$$R_3 = \left(\frac{n_m - n_g}{n_m + n_g} \right)^2 \approx 0,013$$

$$\Rightarrow R_{12} = 0,22 + 0,12 + 2\sqrt{0,22 \cdot 0,12} \approx 0,68$$

$$\Rightarrow R_{\text{tot}} = 0,68 + 0,013 + 2\sqrt{0,68 \cdot 0,013} \approx 0,88$$

Svar: Den maximala reflektansen är 88 %

Spismagnet (Öm. 4)

Givet: Spiralformad ledare, 100 varv,

$I = 5 \text{ A}$, Innersta radie $R_i = 4 \text{ cm}$,

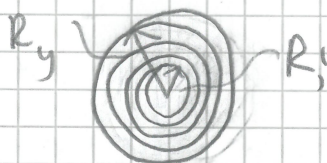
ytterssta $R_y = 30 \text{ cm}$.

Sök: Storleksordningen på magnetfältet som skapas.

Lösning: Två sätt (båda helt okej):
approximation och exakt lösning.

Approximation: Antag att alla varv ligger på en viss radie.

Bild:



Gör approximationen att alla varv ligger på
genomsnittsradien $R_a = \frac{R_i + R_y}{2} = \frac{34 \text{ cm}}{2} = 17 \text{ cm}$.

Har då en kort spole med radien R_a , $N = 100$.
Vi får magnetfältet (precis vid polen, så $z = 0$)

$$B = \frac{N \cdot \mu_0 I}{2 \cdot R_a} = \frac{100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 5 \text{ A}}{2 \cdot 0,17 \text{ m}}$$

$$\approx \left\{ B \right\} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \approx \underline{\underline{1,8 \text{ mT}}}$$

Exakt lösning: Vill integrera!

Får ett visst antal varv per längd, och
vår radiesnutt ger då en kort spole med
antal varv lika med snuttlängden gånger
varvtätheten.

Vi har 100 varv, fördelade på $(R_y - R_i) = 26 \text{ cm}$,

Vi får varvtätheten $n = \frac{100}{26 \text{ cm}} \approx 385 \text{ varv/m}$,

Totala antalet varv på en snutt dr blir därför

$$N = n \cdot dr$$

Vi får därför magnetfältet från en snutt som

$$dB(r) = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot N = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot n \cdot dr,$$

Totala B är summan av alla snutten!

Integrera! Från inre till yttre raden.

$$B = \int_{R_i}^{R_y} \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot n \cdot dr = \frac{\mu_0 I \cdot n}{2} \int_{R_i}^{R_y} \frac{1}{r} dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I \cdot n}{2} \cdot \left[\ln(r) \right]_{R_i}^{R_y} = \frac{\mu_0 I \cdot n}{2} \cdot \ln\left(\frac{R_y}{R_i}\right) =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 5 \text{ A} \cdot 385 \frac{1}{\text{m}}}{2} \cdot \ln\left(\frac{30 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}\right)$$

$$\approx 2,4 \text{ mT}$$

Samma storleksordning på båda svaren!

Båda sätten att lösa är okej.

Vill kolla på ljus områden för att hitta hur långt mellan period.

Maximal konstruktiv interferens då vägskillnaden $= m \cdot \lambda$.

Vi får därmed $a = m \cdot \lambda$

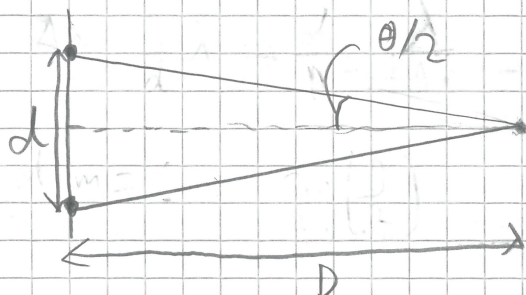
$$\Rightarrow m \cdot \lambda = d \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = d \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = d \cdot \frac{x_m}{D}$$

$$\Rightarrow x_m = \frac{D}{d} \cdot \lambda \cdot m$$

Så avståndet mellan max: $\Delta x = x_m - x_{m-1} =$

$$= \frac{D}{d} \lambda (m - (m-1)) = \frac{D}{d} \cdot \lambda$$

Vi kommer ha ett maximum "rakt fram" / x_m



Vi får att $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d/2}{D}$, men $\frac{\theta}{2}$ litet $\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{D}{d} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Δx är avståndet mellan max, dvs längden en period är spridd över. Vi vill att $\Delta x = 1 \text{ cm}$.

Vi får $\left(\frac{\theta}{2}\right)$ litet $\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2}$

$$\theta = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{514 \text{ nm}}{1 \text{ cm}} = \underline{\underline{51,4 \text{ } \mu\text{rad}}}$$