Övningstenta: Lösningsförslag

Tisdag 7 juni 2016 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Bestäm tangentplanet i punkten $(1, 1, -1)$ till ytan $z = f(x, y)$ där $f(x, y) = x^4 - 2y^2$.

2. (4 poäng) Ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$ skär varandra längs en kurva i en omgivning av punkten $(a, b, c) = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Bestäm tangentlinjen till kurvan i punkten (a, b, c).

3. (4 poäng) Finn de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = 2x - x^3 + 2xy^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, och bestäm för varje kritisk punkt om det är en sadelpunkt, lokal maxpunkt, eller lokal minpunkt.

4. (4 poäng) Är det sant att $3xy^2 + 1 > 0$ då $x^2 + 2y^2 \leq 1$?

5. (4 poäng) Beräkna linjeintegralen
$$\int_{\partial E} (2x + y - 1)dx + (x^2 + 2y)dy$$
där E är ellipsskivan $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 + y^2 \leq 4\}$.

6. (4 poäng) Beräkna integralen
$$\iint_D \frac{1}{(1 + (3u + v)^2)^2} dudv$$
där D ges av $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq 3u + v \leq 1$.

7. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz, 1, z^2)$ ut genom ytan Y definierad av
$$Y: \quad z = x^2 + y^2, \qquad 0 \leq z \leq 1,$$
orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

8. (4 poäng) Beräkna integralen
$$I = \int_\gamma (4x + z^2 \cos(yz))dy + (z - 2y + x \cos(xz))dz$$
där γ är randen till ett område D i planet $z = 3$ vars area är 3, och γ genomlöps moturs sett från origo.

9. (4 poäng) Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara ett öppet begränsat område med C^1-rand ∂K och utåtriktad enhetsnormal $\mathbf{N}$. Låt $\mathbf{u}$ vara ett C^1-vektor fält. Visa att
$$\iint_{\partial K} (\mathbf{N} \times \mathbf{u})dS = \iiint_K (\nabla \times \mathbf{u})dV$$
där integrationen sker komponentvis.

10. (4 poäng) För varje konstant $C \in \mathbb{R}$ så är nivåytan $f(x, y, z) = C$ till funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ett plan som innhåller punkterna $(C^3, 0, 0)$, $(0, 2C^3, 0)$ och $(0, 0, 3C^3)$. Hitta ett uttryck för $f(x, y, z)$.

Extra utmaning: Hur stor del av volymen mellan ytorna $z = 5 - x^2 - y^2$ och $z = 3x^2 + y^2 - 6$ ligger under xy-planet?