Övningstenta: Lösningsförslag

Tisdag 7 juni 2016 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Bestäm tangentplanet i punkten $(1, 1, -1)$ till ytan $z = f(x, y)$ där $f(x, y) = x^4 - 2y^2$.

   Lösning: Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av

   $$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - a),$$

   dvs

   $$z = f(a, b) + 4a^3(x - a) - 4b(y - a),$$

   Sätter vi in $(a, b) = (1, 1)$ får vi $z = -1 + 4(x - 1) - 4(y - 1)$ eller förenklat $z = -1 + 4x - 4y$.

2. (4 poäng) Ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ och $x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$ skär varandra längs en kurva i en omgivning av punkten $(a, b, c) = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Bestäm tangentlinjen till kurvan i punkten (a, b, c).

   Lösning: Tangentplanet till ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ i punkten (a, b, c) är

   $$(2a, 2b, 2c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0 \quad \text{dvs} \quad z = 2\sqrt{3} - \sqrt{5}x.$$

   Tangentplanet till ytan $x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 1$ i punkten (a, b, c) är

   $$(2a, -4b, -4c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0 \quad \text{dvs} \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

   Tangentlinjen till kurvan i punkten (a, b, c) är skärningen av ovanstående tangentplan. Ekvationen

   $$2\sqrt{3} - \sqrt{5}x = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

   har lösningen $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$. Det följer att den sökta tangentlinjen är

   $$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \sqrt{\frac{5}{3}}, z = \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

   [Alternativt: Argumentera med hjälp av symmetri att den sökta tangentlinjen är parallell med y-axeln. Eftersom linjen går genom punkten (a, b, c) ger detta omedelbart samma svar.]

3. (4 poäng) Finn de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = 2x - x^3 + 2xy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, och bestäm för varje kritisk punkt om det är en sadelpunkt, lokal maxpunkt, eller lokal minpunkt.

Lösning: De kritiska punkterna uppfyller $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$, dvs $(2 - 3x^2 + 2y^2, 4xy) = (0,0)$. Den andra ekvationen ger att antingen x eller y är noll. Om $x = 0$ finns ingen lösning. Om $y = 0$ ger första ekvationen att $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Alltså finns det två kritiska punkter i $\pm(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$. Andraderivatorna av f ges av

$$f''_{xx} = -6x, \qquad f''_{xy} = 4y, \qquad f''_{yy} = 4x.$$

För $(x,y) = (\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ leder detta till den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -6\sqrt{\frac{2}{3}}h^2 + 4\sqrt{\frac{2}{3}}k^2$$

som är indefinit. För $(x,y) = (-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ leder detta till den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 6\sqrt{\frac{2}{3}}h^2 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}k^2$$

som också är indefinit. Alltså är (enligt sida 102 i boken) båda de kritiska punkterna sadelpunkter.

4. (4 poäng) Är det sant att $3xy^2 + 1 > 0$ då $x^2 + 2y^2 \le 1$?

Lösning: Funktionen $f(x,y) = 3xy^2 + 1$ är kontinuerlig och området $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 2y^2 \le 1\}$ är kompakt. Så f antar ett minsta värde på K. De inre kritiska punkterna till f är lösningar till $\nabla f = (3y^2, 6xy) = (0,0)$. Alltså ges de inre kritiska punkterna av $(x,0)$ för $|x| < 1$. Då $f(x,0) = 1$ ser vi att olikheten $f > 0$ är uppfylld för dessa punkter. Å andra sidan, i en extrempunkt på randen $g(x,y) = x^2 + 2y^2 = 1$ måste ∇f och ∇g vara parallella. Detta ger villkoret

$$\det \begin{pmatrix} 3y^2 & 6xy \\ 2x & 4y \end{pmatrix} = 12(y^2 - x^2)y = 0.$$

För $y = 0$ har vi $f(x,0) = 1 > 0$, så olikheten är uppfylld. Antag att $y^2 = x^2$. Då är $x^2 + 2x^2 = 1$ dvs $x^2 = 1/3$, vilket ger $f(x,y) = 3x^3 + 1 = x + 1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 > 0$. Det följer att påståendet är sant.

5. (4 poäng) Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\partial E} (2x + y - 1)dx + (x^2 + 2y)dy$$

där E är ellipsskivan $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 + y^2 \le 4\}$.

Lösning: Kurvan ∂E har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Eftersom $\mathbf{r}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, 2\cos t)$ finner vi

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial E} (2x + y - 1)dx + (x^2 + 2y)dy \\
&= \int_0^{2\pi} \big[(2\sqrt{2}\cos t + 2\sin t - 1)(-\sqrt{2}\sin t) + (2\cos^2 t + 4\sin t)2\cos t\big]dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big[-2\sqrt{2}\sin^2 t + \sqrt{2}\sin t + 4\cos^3 t + 4\sin t\cos t\big]dt \\
&= -2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

6. (4 poäng) Beräkna integralen

$$\iint_D \frac{1}{(1 + (3u + v)^2)^2} dudv$$

där D ges av $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq 3u + v \leq 1$.

Lösning: D är en triangel i uv-planet med hörn i $(0,0)$, $(1/3, 0)$ och $(0, 1)$. Låt $g(u, v) = 3u + v$ och $h(w) = \frac{1}{(1+w^2)^2}$. För $0 \leq w \leq 1$ så är

$$G_w = \{(u, v) \in D \,|\, g(u, v) \leq w\},$$

en triangel med hörn i $(0,0)$, $(w/3, 0)$ och $(0, w)$. Arean av G_w ges av $A(w) = w^2/6$. Integration med hjälp av nivåkurvor ger

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{(1 + (3u + v)^2)^2} dudv &= \iint_D h(g(u, v))dudv = \int_0^1 h(w)A'(w)dw \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1 + w^2)^2}\frac{w}{3}dw = -\frac{1}{6(1 + w^2)}\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

7. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz, 1, z^2)$ ut genom ytan Y definierad av

$$Y: \quad z = x^2 + y^2, \qquad 0 \leq z \leq 1,$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

Lösning: Eftersom Y är en graf gäller $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dxdy$ där $\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) =$

$(-2x, -2y, 1)$. Alltså ges flödet av $\mathbf{F}$ ut genom Y av

$$\begin{aligned}
\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (xz, 1, z^2) \cdot (-2x, -2y, 1) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-2x^2 z - 2y + z^2) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-2x^2(x^2+y^2) - 2y + (x^2+y^2)^2) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r^4 \cos^2\varphi - 2r \sin\varphi + r^4) r dr d\varphi \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-2r^4 \cos^2\varphi - 2r \sin\varphi + r^4) r d\varphi dr \\
&= \int_0^1 (-2\pi r^5 + 2\pi r^5) dr = 0.
\end{aligned}$$

Alternativ lösning: Flödet av $\mathbf{F}$ ut genom Y ges av

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Eftersom ytan Y inte är sluten så vi kan inte använda divergenssatsen direkt. Vi sluter ytan genom att lägga på ett lock $Y_l = \{(x, y, 1) \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$. Divergenssatsen applicerad på ytan $-Y + Y_l$ ger att flödet ut genom ytan $-Y + Y_l$ är

$$\iint_{-Y+Y_l} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dxdydz,$$

där K är kroppen $x^2 + y^2 \le z \le 1$. Då $\nabla \cdot \mathbf{F} = z + 2z = 3z$ finner vi

$$\begin{aligned}
\iint_{-Y+Y_l} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_K 3z dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left. \frac{3z^2}{2} \right|_{z=x^2+y^2}^{1} dxdy \\
&= \frac{3}{2} \iint_{x^2+y^2 \le 1} (1 - (x^2+y^2)^2) dxdy \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^4) r dr d\varphi = \pi.
\end{aligned}$$

Vi beräknar nu flödet ut genom locket Y_l. Den utåtriktade enhetsnormalen till Y_l är $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Således ges flödet ut genom Y_l av

$$\iint_{Y_l} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{Y_l} (x, 1, 1) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_{Y_l} dS = \pi.$$

Det följer att flödet av $\mathbf{F}$ ut genom Y är lika med noll:

$$\iint_{-Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{-Y+Y_l} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{Y_l} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pi - \pi = 0.$$

8. (4 poäng) Beräkna integralen

$$I = \int_\gamma (4x + z^2\cos(yz))dy + (z - 2y + x\cos(xz))dz$$

där γ är randen till ett område D i planet $z = 3$ vars area är 3, och γ genomlöps moturs sett från origo.

Lösning: Låt $\mathbf{F} = (0, 4x + z^2\cos(yz), z - 2y + x\cos(xz))$. En räkning ger att

$$\nabla \times \mathbf{F} = (-2 - 2z\cos(yz) + yz^2\sin(yz), -\cos(xz) + xz\sin(xz), 4).$$

Orientera D s att positiva sidan r uppåt med enhetsnormal $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Då gller att $\partial D = -\gamma$. Stokes' sats ger nu

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS \\ &= -4\iint_D dS = -4\text{Area}(D) = -12. \end{aligned}$$

9. (4 poäng) Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara ett öppet begränsat område med C^1-rand ∂K och utåtriktad enhetsnormal $\mathbf{N}$. Låt $\mathbf{u}$ vara ett C^1-vektor fält. Visa att

$$\iint_{\partial K} (\mathbf{N} \times \mathbf{u}) dS = \iiint_K (\nabla \times \mathbf{u}) dV$$

där integrationen sker komponentvis.

Lösning: Låt $\mathbf{N} = (n_1, n_2, n_3)$ och $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Om vi låter ∂_i beteckna derivation med avseende på i:te variabeln, kan rotationen av $\mathbf{u}$ skrivas

$$\nabla \times \mathbf{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Eftersom

$$\mathbf{N} \times \mathbf{u} = (u_3 n_2 - u_2 n_3, u_1 n_3 - u_3 n_1, u_2 n_1 - u_1 n_2),$$

så ger divergenssatsen att

$$\iint_{\partial K} (u_3 n_2 - u_2 n_3) dS = \iint_{\partial K} (0, u_3, -u_2) \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) dV.$$

Detta visar första komponenten av påståendet. Ett analogt argument visar andra och tredje komponenterna av påståendet.

10. (4 poäng) För varje konstant $C \in \mathbb{R}$ så är nivåytan $f(x, y, z) = C$ till funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ett plan som innhåller punkterna $(C^3, 0, 0)$, $(0, 2C^3, 0)$ och $(0, 0, 3C^3)$. Hitta ett uttryck för $f(x, y, z)$.

Lösning: Funktionen f är konstant på det plan som innehåller punkterna $(C^3, 0, 0)$, $(0, 2C^3, 0)$, $(0, 0, 3C^3)$. Vi har

$$(0, 2C^3, 0) - (C^3, 0, 0) = C^3(-1, 2, 0)$$

och

$$(0, 0, 3C^3) - (C^3, 0, 0) = C^3(-1, 0, 3).$$

Alltså är

$$f(x,y,z) = f((x,y,z) + \alpha(-1,2,0) + \beta(-1,0,3))$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Väljer vi $\alpha = -y/2$ och $\beta = -z/3$ finner vi

$$f(x,y,z) = f\Big(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}, 0, 0\Big).$$

Å andra sidan vet vi att

$$f(C^3, 0, 0) = C \quad \text{dvs} \quad f(x,0,0) = x^{1/3}.$$

Detta ger

$$f(x,y,z) = \Big(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\Big)^{1/3}.$$

Extra utmaning: Hur stor del av volymen mellan ytorna $z = 5 - x^2 - y^2$ och $z = 3x^2 + y^2 - 6$ ligger under xy-planet?

Lösning: Ytan $z = 3x^2 + y^2 - 6$ skär xy-planet i ellipsen

$$\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\sqrt{6}}\Big)^2 = 1.$$

Låt E vara ellipskivan innesluten av denna ellips:

$$E = \Big\{(x,y) \,\Big|\, \Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\sqrt{6}}\Big)^2 \le 1\Big\}.$$

Ytan $z = 5 - x^2 - y^2$ skär xy-planet i circeln med radie $\sqrt{5}$ med centrum i origo. Låt D vara disken innesluten av denna cirkel:

$$D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \le 5\}.$$

Låt K vara den del av kroppen mellan ytorna som ligger under xy-planet. Kroppen K begränsas för $(x,y) \in E \cap D$ nedåt av ytan $z = 3x^2 + y^2 - 6$ och uppåt av planet $z = 0$. För $(x,y) \in E \setminus D$ så begränsas K nedåt av ytan $z = 3x^2 + y^2 - 6$ och uppåt av ytan $z = 5 - x^2 - y^2$ (eftersom $5 - x^2 - y^2 \le 0$ för $(x,y) \in E \setminus D$). Alltså har vi

$$\begin{aligned}\text{Volym}(K) = &\iint_{E\cap D} (0 - (3x^2 + y^2 - 6))dxdy \\ &+ \iint_{E\setminus D} ((5 - x^2 - y^2) - (3x^2 + y^2 - 6))dxdy.\end{aligned}$$

Då ∂E och ∂D skär varandra i de fyra punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$, finner vi

$$\begin{aligned}E \cap D = &\Big\{(x,y) \,\Big|\, |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}, |y| \le \sqrt{5 - x^2}\Big\} \\ &\cup \Big\{(x,y) \,\Big|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \le |x| \le \sqrt{2}, |y| \le \sqrt{6 - 3x^2}\Big\}\end{aligned}$$

och

$$E \setminus D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{5-x^2} \le |y| \le \sqrt{6-3x^2} \right\}.$$

Symmetri innebär att totala volymen av K är fyra gånger volymen för den del av K som har $x > 0$ och $y > 0$. Vi finner således

$$\begin{aligned}
\text{Volym}(K) = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\sqrt{5-x^2}} (0 - (3x^2 + y^2 - 6))dydx \\
+ 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{6-3x^2}} (0 - (3x^2 + y^2 - 6))dydx \\
+ 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{6-3x^2}} ((5 - x^2 - y^2) - (3x^2 + y^2 - 6))dydx \\
= -3 + 8\sqrt{3}\pi + 10 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 35\text{arccot}(3) \approx 32.487.
\end{aligned}$$

Kommentar: Som väntat så är svaret något mindre än volymen mellan ytan $z = 3x^2 + y^2 - 6$ och xy-planet vilken är

$$4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{6-3x^2}} (0 - (3x^2 + y^2 - 6))dydx = 6\sqrt{3}\pi \approx 32.648.$$