# Lösningar till tentamen, SG1109, 8/6, 2015

1.

$$\mathbf{r}_{AC} = -5a\mathbf{e}_x - 10a\mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_z)\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = 4a\mathbf{e}_x + 4a\mathbf{e}_y - 8a\mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z) \tag{2}$$

Spännkrafterna i linorna kan skrivas

$$\mathbf{S}_1 = S_1\mathbf{e}_{AB}\,, \quad \mathbf{S}_2 = S_2\mathbf{e}_{AC}\,. \tag{3}$$

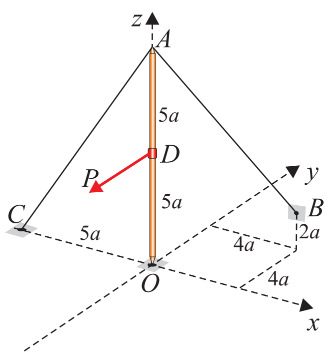
Kraftmomentet med avseende på origo är noll:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OD} \times (-P\mathbf{e}_y) + \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \tag{4}$$

$$5\mathbf{e}_z \times (-P\mathbf{e}_y) + 10\mathbf{e}_z \times \left(\frac{S_1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) - \frac{S_2}{\sqrt{5}}\mathbf{e}_x\right) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \tag{5}$$

$$\left(5P - \frac{10S_1}{\sqrt{6}}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{10S_1}{\sqrt{6}} - \frac{10S_2}{\sqrt{5}}\right)\mathbf{e}_y = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \tag{6}$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}P = \sqrt{\frac{3}{2}}P\,, \quad S_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}S_1 = \sqrt{\frac{5}{4}}P \tag{7}$$




2. Med koordinatsystemet som i figuren kan Newtons andra lag i radiell led skrivas

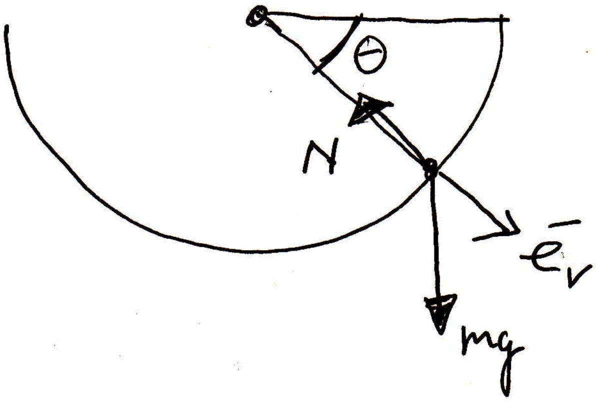
$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -N + mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad N = mg\sin\theta + R\dot{\theta}^2\,, \tag{8}$$

eftersom $r = R$. Den potentiella energin för vagnen kan skrivas $V = -mgR\sin\theta$. Energiekvationen kan nu skrivas

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 - mgR\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R\dot{\theta}^2 = 2mg\sin\theta\,, \tag{9}$$

vilket insatt i ekvation (8) ger

$$N = 3mg\sin\theta\,. \tag{10}$$




3. Med en $x$-axel åt höger i figuren fås:

$$v_{2x} = v_0\,, \quad v_{1x} = 0\,. \tag{11}$$

Vi har också att

$$e = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}} \quad \Rightarrow \quad v'_{2x} - v'_{1x} = -ev_0\,. \tag{12}$$

Rörelsemängden bevaras, vilket ger

$$v'_{2x} + v'_{1x} = v_0\,. \tag{13}$$

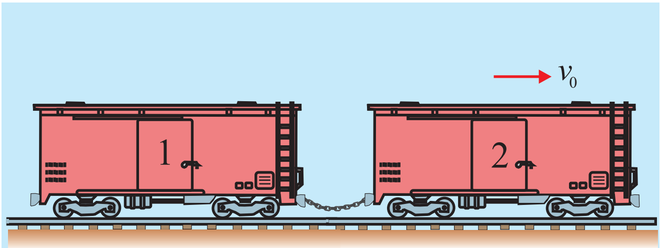
Ekvation (12) och (16) ger

$$v'_{2x} = \frac{(1-e)v_0}{2}\,, \qquad v'_{1x} = \frac{(1+e)v_0}{2} \tag{14}$$

Förhållandet mellan den totala kinesiska energin efter of före stöten kan nu skrivas

$$\frac{T_e}{T_f} = \frac{{v'_{1x}}^2 + {v'_{2x}}^2}{v_0^2} = \frac{1}{4}((1-e)^2 + (1+e)^2) = \frac{1+e^2}{2} \tag{15}$$

Då $e = 1$ fås alltså $T_e/T_f = 1$ och då $e = 0$ fås att $T_e/T_f = 1/2$.




4. Rörelsemängdmomentets bevarande ger

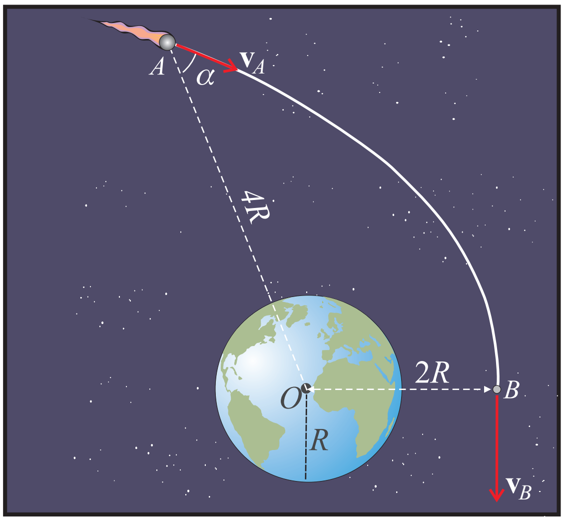
$$4R \sin\alpha v_A = 2Rv_B\,, \quad \Rightarrow \quad v_B = 2\sin\alpha v_A = \sqrt{3}v_A\,, \tag{16}$$

eftersom $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$. Energiekvationen ger

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mgR^2}{4R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{mgR^2}{2R} \tag{17}$$

Alltså fås

$$v_A^2 = gR\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{Rg}{4} \quad \Rightarrow \quad v_A = \frac{\sqrt{Rg}}{2} \tag{18}$$



# Teoridel

1. Se sidan 46 i boken!

2. Se sidan 148-159 i boken!

3. Se sidan 285 i boken!

4. Beteckna fjäderns förlängning i $B$ med $b$. Energiekvationen ger

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}kb^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 + \frac{mv_A^2}{k}}\,. \tag{19}$$

5. Med en $y$-axel riktad nedåt fås partikelns läge som $y = \frac{1}{2}gt^2$. Med $y = h$ fås $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Energiprincipen ger $v = \sqrt{2gh}$ för hastigheten vid nedslaget.

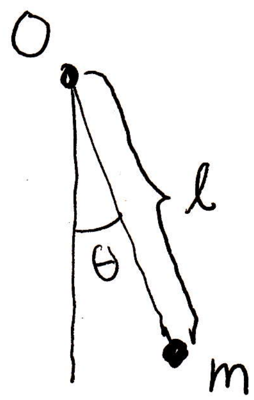
6. Se sidan 252 i boken!

7. Se sidan 200-201 i boken!

8. Se sidan 331 i boken!

9. Se sidan 356 i boken!

10. Om vi sätter den potentialla energin till noll i upphängningspunkten $O$ kan vi skriva den potentiella energin som $V = -mgl\cos\theta$. Den kinetiska energin




kan vi skriva som $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$. Energiekvationen kan vi följaktligen skriva som

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = Konstant\,. \tag{20}$$

Vi dividerar med $ml^2$ och deriverar med avseende på tiden:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0\,, \tag{21}$$

vilket är den eftersökta ekvationen. För små utslagvinklar kan vi göra approximationen $\sin\theta = \theta$ och får då ekvationen

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0\,, \tag{22}$$

vilket är ekvationen för en harmonisk svängning med $\omega_n = \sqrt{g/l}$ och perioden

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{23}$$