Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 7 juni 2016

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt S vara ellipsoiden som ges av ekvationen $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$.
   (a) Bestäm en normalvektor till S i en punkt (x_0, y_0, z_0) på S. **(2 p)**
   (b) Bestäm de värden på konstanten d för vilka planet $x + 2y + 6z = d$ är ett tangentplan till S. **(2 p)**

2. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y+2z, x+3z, 2x+3y)$ och låt C vara den räta linjen från $(1, 1, 1)$ till $(3, 3, 3)$.
   (a) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att använda en parametrisering av kurvan C. **(2 p)**
   (b) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och beräkna samma kurvintegral med hjälp av en potential. **(2 p)**

3. Låt $f(x, y) = \sqrt{\cos(y) + \ln(1 + x)}$ för de x och y där detta uttryck är väldefinierat. Bestäm konstanterna a, b och c så att

$$f(x, y) = a + bx + cy + O(x^2 + y^2).$$

Detta betyder att det finns en konstant M sådan att

$$|f(x, y) - (a + bx + cy)| \leq M(x^2 + y^2)$$

för alla punkter (x, y) i en omgivning av origo. **(4 p)**

DEL B

4. En partikel färdas i en bana som beskrivs av parametriseringen
$$\mathbf{r}(t) = (\cos \pi t + \sin \pi t, \cos \pi t - \sin \pi t, \pi t), \qquad 0 \le t \le 4.$$
   (a) Beräkna partikelns hastighet, $\mathbf{r}'(t)$, och acceleration, $\mathbf{r}''(t)$. **(1 p)**
   (b) Visa att hastigheten och accelerationen är vinkelräta mot varandra. **(1 p)**
   (c) Beräkna sträckan som partikeln har färdats under intervallet $0 \le t \le 4$. **(2 p)**

5. Området D i planet ges av
$$(x^2 + y^2 - x)^2 \le x^2 + y^2$$
villket i polära koordinater motsvaras av olikheten $r \le 1 + \cos\theta$. Bestäm koordinaterna till masscentret av området D om dess densitet är konstant. **(4 p)**

6. Vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är definierat i rummet och uppfyller $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = x^2 + y^2 + z^2$. Vi känner dessutom till att
$$F_3(x, y, z) = y^2 + xz.$$
Ytan S är övre halvan av enhetssfären som beskrivs av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, och dess orientering ges av att normalvektorn $\mathbf{N} = (x, y, z)$ har positiv riktning. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt $f(x, y, z)$ vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av variablerna x, y och z som endast beror på avståndet från origo. Det vill säga $f(x, y, z) = g(r)$ för någon två gånger deriverbar funktion $g(r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   Laplaceoperatorn ∇^2 definieras av att

   $$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

   Beräkna $\nabla^2 f$ uttryckt i r, funktionen $g(r)$ och dess derivator, för $r > 0$. **(4 p)**

8. Visa att ekvationen $4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) = 1$ endast har lösningen $(x, y) = (0, 0)$. **(4 p)**

9. Låt $u(x, y)$ vara en *harmonisk funktion*, d.v.s. en funktion som uppfyller

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{för alla } x, y.$$

   (a) Ange en kurvintegral som beräknar medelvärdet $v(r)$ av $u(x, y)$ över alla punkter (x, y) som ligger på en cirkel med radie r kring origo. **(1 p)**

   (b) Det går att beräkna derivatan $v'(r)$ genom att derivera innanför integraltecknet. Visa att $v(r)$ är en konstant funktion genom att använda divergenssatsen på kurvintegralen för $v'(r)$. **(2 p)**

   (c) Använd detta till att visa att $v(r) = u(0, 0)$ för alla $r > 0$. **(1 p)**