



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys**  
**Lösningsförslag till tentamen 2016-06-07**

DEL A

1. Låt  $S$  vara ellipsoiden som ges av ekvationen  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$ .
- (a) Bestäm en normalvektor till  $S$  i en punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  på  $S$ . **(2 p)**
- (b) Bestäm de värden på konstanten  $d$  för vilka planet  $x + 2y + 6z = d$  är ett tangentplan till  $S$ . **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

- (a) Eftersom ytan är en nivåyta för funktionen  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  ges en normalvektor av gradienten, dvs  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 4y_0, 6z_0)$ .
- (b) För att  $x + 2y + 6z = d$  ska vara ett tangentplan måste  $\nabla f$  vara parallell med  $(1, 2, 6)$  i dessa punkter, dvs  $(2x_0, 4y_0, 6z_0) = (t, 2t, 6t)$  för något  $t$ . Detta ger  $(x_0, y_0, z_0) = t(1/2, 1/2, 1)$  och när vi sätter in det i ekvationen får vi

$$\frac{t^2}{4} + 2\frac{t^2}{4} + 3t^2 = 5$$

dvs  $15t^2 = 20$  och  $t = \pm 2/\sqrt{3}$ . Detta ger

$$d = x_0 + 2y_0 + 6z_0 = t/2 + t + 6t = \frac{15}{2}t = \pm 5\sqrt{3}.$$

**Svar.**

- (a)  $(2x_0, 4y_0, 6z_0)$  är en normalvektor till ellipsoiden i punkten  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- (b)  $d = \pm 5\sqrt{3}$ .

2. Låt  $\mathbf{F}$  vara vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 2z, x + 3z, 2x + 3y)$  och låt  $C$  vara den räta linjen från  $(1, 1, 1)$  till  $(3, 3, 3)$ .

(a) Beräkna kurvintegralen  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  genom att använda en parametrisering av kurvan  $C$ . (2 p)

(b) Visa att  $\mathbf{F}$  är konservativt och beräkna samma kurvintegral med hjälp av en potential. (2 p)

### Lösningförslag.

(a) En parametrisering av kurvan ges av  $\mathbf{r}(t) = (t, t, t)$  på intervallet  $1 \leq t \leq 3$ . Då får vi  $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, 1)$  och kurvintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^3 (3t, 4t, 5t) \cdot (1, 1, 1) dt = \int_1^3 12t dt \\ &= [6t^2]_1^3 = 6 \cdot (3^2 - 1^2) = 6 \cdot 8 = 48. \end{aligned}$$

(b) För att bestämma en potential integrerar vi först första komponenten i  $x$ -led och får  $\Phi(x, y, z) = xy + 2xz + g(y, z)$ . När vi deriverar detta med avseende på  $y$  får vi  $x + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z$  och därmed  $g(y, z) = 3yz + h(z)$ . Till slut ger derivering med avseende på  $z$  att  $2x + 3y + h'(z) = 2x + 3y$  och vi kan välja  $h(z) = 0$ . Därmed är  $\Phi(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$  en potential till  $\mathbf{F}$  och vektorfältet är konservativt.

Vi kan nu beräkna kurvintegralen som

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \Phi(3, 3, 3) - \Phi(1, 1, 1) \\ &= (9 + 18 + 27) - (1 + 2 + 3) \\ &= 54 - 6 = 48. \end{aligned}$$

### Svar.

(a)  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 48$ .

(b)  $\Phi(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$  är en potential till  $\mathbf{F}$ .

3. Låt  $f(x, y) = \sqrt{\cos(y) + \ln(1+x)}$  för de  $x$  och  $y$  där detta uttryck är väldefinierat. Bestäm konstanterna  $a$ ,  $b$  och  $c$  så att

$$f(x, y) = a + bx + cy + O(x^2 + y^2).$$

Detta betyder att det finns en konstant  $M$  sådan att

$$|f(x, y) - (a + bx + cy)| \leq M(x^2 + y^2)$$

för alla punkter  $(x, y)$  i en omgivning av origo.

**(4 p)**

**Lösningförslag.** Polynomet  $a + bx + cy$  måste vara Taylorpolynomet av grad 1 till funktionen  $f$  för att villkoret ska vara uppfyllt. Vi beräknar värdet i origo som  $f(0, 0) = \sqrt{\cos(0) + \ln(1+0)} = \sqrt{1} = 1$ . Alltså ska  $a = 1$ . Vidare ska  $b$  vara partiella derivatan med avseende på  $x$  i origo och vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(y) + \ln(1+x)}} \cdot \frac{1}{1+x}$$

och

$$b = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(0) + \ln(1+0)}} \cdot \frac{1}{1+0} = \frac{1}{2}.$$

Till sist får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(y) + \ln(1+x)}} \cdot (-\sin(y))$$

och

$$c = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(0) + \ln(1+0)}} \cdot (-\sin(0)) = 0.$$

**Svar.** Konstanterna ges av  $a = 1$ ,  $b = 1/2$  och  $c = 0$ .

## DEL B

4. En partikel färdas i en bana som beskrivs av parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \pi t + \sin \pi t, \cos \pi t - \sin \pi t, \pi t), \quad 0 \leq t \leq 4.$$

- (a) Beräkna partikelns hastighet,  $\mathbf{r}'(t)$ , och acceleration,  $\mathbf{r}''(t)$ . **(1 p)**  
 (b) Visa att hastigheten och accelerationen är vinkelräta mot varandra. **(1 p)**  
 (c) Beräkna sträckan som partikeln har färdats under intervallet  $0 \leq t \leq 4$ . **(2 p)**

**Lösningförslag.**

(a)

$$\mathbf{r}'(t) = (-\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t, -\pi \sin \pi t - \pi \cos \pi t, \pi)$$

och

$$\mathbf{r}''(t) = (-\pi^2 \cos \pi t - \pi^2 \sin \pi t, -\pi^2 \cos \pi t + \pi^2 \sin \pi t, 0).$$

(b) Genom att beräkna skalärprodukten  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$  kan vi se att de är vinkelräta.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) &= -\pi^3(\cos \pi t - \sin \pi t)(\cos \pi t + \sin \pi t) \\ &\quad + \pi^3(\cos \pi t + \sin \pi t)(\cos \pi t - \sin \pi t) + \pi \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

vilket visar att de är vinkelräta.

(c) Farten hos partikeln ges av  $|\mathbf{r}'(t)|$  och vi får detta som

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(-\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t)^2 + (-\pi \sin \pi t - \pi \cos \pi t)^2 + \pi^2} \\ &= \sqrt{2\pi^2(\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t) + \pi^2} = \pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Därmed kan vi beräkna sträckan som partikeln färdats som

$$\int_0^4 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^4 \pi\sqrt{3} dt = 4\pi\sqrt{3}.$$

**Svar.**

- (a) Hastigheten är  $\mathbf{r}'(t) = (-\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t, -\pi \sin \pi t - \pi \cos \pi t, \pi)$  och accelerationen  $\mathbf{r}''(t) = (-\pi^2 \cos \pi t - \pi^2 \sin \pi t, -\pi^2 \cos \pi t + \pi^2 \sin \pi t, 0)$ .  
 (c) Sträckan är  $4\pi\sqrt{3}$ .

5. Området  $D$  i planet ges av

$$(x^2 + y^2 - x)^2 \leq x^2 + y^2$$

villket i polära koordinater motsvaras av olikheten  $r \leq 1 + \cos \theta$ . Bestäm koordinaterna till masscentret av området  $D$  om dess densitet är konstant. **(4 p)**

**Lösningförslag.** För att beräkna masscentrum behöver vi beräkna arean  $A$  och de båda integralerna  $I_x = \iint_D x \, dx \, dy$  och  $I_y = \iint_D y \, dx \, dy$ .

Arean ges av

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

För  $I_x$  får vi

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \cos \theta \, r \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{1+\cos\theta} \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos^3 \theta + (1 - \sin^2 \theta) \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left( \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + 3 \cos^3 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{3} \left( 0 + 4\pi + 0 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \sin \theta \, r \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{1+\cos\theta} \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \left[ -\frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Vi får nu  $x$ -koordinaten för masscentrum som  $I_x/A = (5\pi/4)/(3\pi/2) = 5/6$  och  $y$ -koordinaten som  $I_y/A = 0$ .

**Svar.** Masscentrum ligger i punkten  $(5/6, 0)$ .

6. Vektorfältet  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  är definierat i rummet och uppfyller  $\operatorname{div} \mathbf{F} = x^2 + y^2 + z^2$ . Vi känner dessutom till att

$$F_3(x, y, z) = y^2 + xz.$$

Ytan  $S$  är övre halvan av enhetsfären som beskrivs av  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ , och dess orientering ges av att normalvektorn  $\mathbf{N} = (x, y, z)$  har positiv riktning. Beräkna flödet av  $\mathbf{F}$  genom  $S$ . **(4 p)**

**Lösningförslag.** I och med att vi känner till divergensen överallt kan vi använda divergenssatsen för att beräkna flödet ut genom den slutna yta som utgör randen till halvklotet  $H$  som ges av  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  och  $z \geq 0$ . Detta flöde blir enligt divergenssatsen

$$\begin{aligned} \iiint_H (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^1 \cdot [-\cos \phi]_0^{\pi/2} \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

För att få reda på flödet ut genom den buktiga delen av ytan behöver vi dra bort flödet ut genom bottenytan. Där har vi en normalvektor  $(0, 0, -1)$  vilket ger ett flöde

$$\iint_D -(y^2 + xz) \, dx \, dy$$

där  $D$  är enhetscirkeln i  $xy$ -planet. I och med att  $z = 0$  där har vi flödet

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^2 \sin^2 \theta \, r \, dr \, d\theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Flödet genom den buktiga ytan blir därmed

$$\frac{2\pi}{5} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{20}.$$

**Svar.** Flödet genom ytan blir  $13\pi/20$ .

## DEL C

7. Låt  $f(x, y, z)$  vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av variablerna  $x$ ,  $y$  och  $z$  som endast beror på avståndet från origo. Det vill säga  $f(x, y, z) = g(r)$  för någon två gånger deriverbar funktion  $g(r)$ , där  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Laplaceoperatoren  $\nabla^2$  definieras av att

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Beräkna  $\nabla^2 f$  uttryckt i  $r$ , funktionen  $g(r)$  och dess derivator, för  $r > 0$ . (4 p)

**Lösningförslag.** Enligt kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(r) \frac{\partial r}{\partial x}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(r) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + g'(r) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Eftersom  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  får vi

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

och

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1 \cdot r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

På grund av symmetrin får vi motsvarande för  $y$  och  $z$ . Därmed har vi

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= g''(r) \left( \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) + g'(r) \left( \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right) \\ &= g''(r) + g'(r) \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = g''(r) + \frac{2}{r} g'(r). \end{aligned}$$

**Svar.**  $\nabla^2 f = g''(r) + 2g'(r)/r$  för  $r > 0$ .

8. Visa att ekvationen  $4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) = 1$  endast har lösningen  $(x, y) = (0, 0)$ .  
(4 p)

**Lösningförslag.** Vi kan visa att det bara finns en lösning genom att visa att vänsterledet är större än 1 i alla andra punkter. För att visa det ser vi på möjliga lokala extrempunkter. I och med att funktionen är deriverbar överallt måste en lokal extrempunkt uppfylla att gradienten av vänsterledet är nollvektorn. Låt  $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2)$ . Vi får då att

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (8x - 4x \sin(2x^2 + y^2), 6y - 2y \sin(2x^2 + y^2)) \\ &= (4x(2 - \sin(2x^2 + y^2)), 2y(3 - \sin(2x^2 + y^2)))\end{aligned}$$

I och med att sinus aldrig kan anta värdena 2 eller 3 finns bara en kritisk punkt och detta är origo. Utanför ellipsen med ekvation  $4x^2 + 3y^2 = 3$  tar funktionen bara värden större än eller lika med två. Eftersom origo är den enda kritiska punkten innanför denna ellips måste funktionen vara större än 1 i alla punkter utanför origo.



9. Låt  $u(x, y)$  vara en *harmonisk funktion*, d.v.s. en funktion som uppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{för alla } x, y.$$

- (a) Ange en kurvintegral som beräknar medelvärdet  $v(r)$  av  $u(x, y)$  över alla punkter  $(x, y)$  som ligger på en cirkel med radie  $r$  kring origo. **(1 p)**
- (b) Det går att beräkna derivatan  $v'(r)$  genom att derivera innanför integraltecknet. Visa att  $v(r)$  är en konstant funktion genom att använda divergenssatsen på kurvintegralen för  $v'(r)$ . **(2 p)**
- (c) Använd detta till att visa att  $v(r) = u(0, 0)$  för alla  $r > 0$ . **(1 p)**

### Lösningförslag.

(a) Vi ska beräkna medelvärdet över en cirkel med radie  $r$  kring origo och får då

$$v(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

(b) Vi deriverar  $v(r)$  och får då

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \right) d\theta. \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \right) r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{N} ds. \end{aligned}$$

Den sista integralen är en flödesintegral som vi kan beräkna med hjälp av divergenssatsen och får då

$$v'(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{N} ds = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} \mathbf{div} \mathbf{grad} u ds.$$

Eftersom  $\mathbf{div} \mathbf{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  ger detta att  $v'(r) = 0$ .

- (c) I och med att  $v'(r) = 0$  har vi att  $v(r) = C$  där  $C$  är en konstant. För att bestämma konstanten ser vi på gränsvärdet då  $r$  går mot noll. På grund av kontinuiteten har vi att medelvärdet på en cirkel med radie  $r$  måste gå mot värdet i origo när  $r$  går mot noll. Därmed är  $C = u(0, 0)$  och  $v(r) = u(0, 0)$  för alla  $r > 0$ .
-