# Tentamen: Lösningsförslag

Tisdag 7 juni 2016 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

eller visa att gränsvärdet inte existerar.

**Lösning:** Låt $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. För restriktionen av $f$ till $x$-axeln har vi

$$f(x,0) = 0 \to 0 \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Å andra sidan, för restriktionen av $f$ till parabeln $y = x^2$ har vi

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Eftersom dessa två gränsvärden är olika så följer att $f$ saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.
**Svar:** Gränsvärdet existerar inte.

2. (4 poäng) Beräkna

$$\frac{d}{dy}\int_{y^2}^{y^3} \frac{e^{xy^2}}{x}dx$$

för $y > 0$.

**Lösning:** Vi beräknar, för $y > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\int_{y^2}^{y^3} \frac{e^{xy^2}}{x}dx &= \int_{y^2}^{y^3} \frac{d}{dy}\frac{e^{xy^2}}{x}dx + \left[\frac{e^{xy^2}}{x}\right]_{x=y^3}\frac{d}{dy}y^3 - \left[\frac{e^{xy^2}}{x}\right]_{x=y^2}\frac{d}{dy}y^2 \\
&= \int_{y^2}^{y^3} 2ye^{xy^2}dx + \frac{e^{y^5}}{y^3}(3y^2) - \frac{e^{y^4}}{y^2}(2y) \\
&= \left[\frac{2e^{xy^2}}{y}\right]_{x=y^2}^{y^3} + \frac{3e^{y^5}}{y} - \frac{2e^{y^4}}{y} \\
&= \frac{2e^{y^5}}{y} - \frac{2e^{y^4}}{y} + \frac{3e^{y^5}}{y} - \frac{2e^{y^4}}{y} \\
&= \frac{5e^{y^5} - 4e^{y^4}}{y}.
\end{aligned}$$

**Svar:** $\frac{5e^{y^5}-4e^{y^4}}{y}$.

3. (4 poäng) Beräkna dubbelintegralen

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\, dxdy.$$

**Lösning:** Då funktionen $e^{x^2}$ inte kan bli explicit integrerad med avseende på $x$ så byter vi integrationsordning. Detta ger

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\, dxdy &= \int_0^{\sqrt{\ln 3}} \int_0^{2x} e^{x^2}\, dydx = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} 2xe^{x^2}\, dx \\ &= e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 3}} = e^{\ln 3} - 1 = 2.\end{aligned}$$

**Svar:** 2.

4. (4 poäng) Transformera $f''_{xy}$ till de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = xy. \end{cases}$$

**Lösning:** Detta är uppgift 2.55 i övningsboken. Kedjeregeln ger

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}, \end{cases}$$

dvs

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial v}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}\right) f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial v}\right)(f'_u + yf'_v) = f''_{uu} + \frac{\partial y}{\partial u}f'_v + yf''_{vu} + xf''_{uv} + x\frac{\partial y}{\partial v}f'_v + xyf''_{vv} \\ &= f''_{uu} + uf''_{uv} + vf''_{vv} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial v}\right)f'_v. \end{aligned}$$

Nu är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix},$$

så vi finner

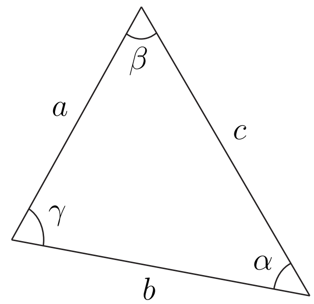
$$\frac{\partial y}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x-y} = 1.$$

Alltså får vi

$$f''_{xy} = f''_{uu} + uf''_{uv} + vf''_{vv} + f'_v.$$

**Svar:** $f''_{xy} = f''_{uu} + uf''_{uv} + vf''_{vv} + f'_v$.

5. (4 poäng) Betrakta en triangel vars tre sidor har längderna $a, b, c$ och där $\alpha, \beta, \gamma$ betecknar motstående vinklar enligt följande figur:




Hitta ett implicit uttryck för $\alpha = \alpha(a, b, c)$ som en funktion av $a, b$ och $c$ och bestäm de partiella derivatorna $\frac{\partial\alpha}{\partial a}$ och $\frac{\partial\alpha}{\partial b}$.

**Lösning:** Enkel geometri ger

$$\begin{cases} c\cos\beta + b\cos\gamma = a, \\ a\cos\gamma + c\cos\alpha = b, \\ b\cos\alpha + a\cos\beta = c. \end{cases}$$

Vi kan eliminera $\beta$ och $\gamma$ från det här ekvationssystemet tex på följande sätt. Första ekvationen ger $\cos\gamma = \frac{a}{b} - \frac{c}{b}\cos\beta$. Sätter vi in detta uttrycket för $\cos\gamma$ i andra ekvationen får vi

$$\frac{a^2}{b} - \frac{ac}{b}\cos\beta + c\cos\alpha = b \quad \text{dvs} \quad \cos\beta = -\frac{b}{ac}\left(b - \frac{a^2}{b} - c\cos\alpha\right).$$

Detta ger efter förenkling

$$\cos\beta = -\frac{b^2}{ac} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}\cos\alpha.$$

Vi sätter in detta uttrycket i tredje ekvationen och förenklar. Det följer att $\alpha$ ges implicit som en funktion av $(a, b, c)$ av ekvationen

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha = 0. \tag{1}$$

För att beräkna $\frac{\partial\alpha}{\partial a}$ deriverar vi (1) partiellt med avseende på $a$ vilket ger

$$2a - 2bc(\sin\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial a} = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial a} = \frac{a}{bc\sin\alpha}.$$

För att beräkna $\frac{\partial\alpha}{\partial b}$ deriverar vi (1) partiellt med avseende på $b$ vilket ger

$$-2b + 2c\cos\alpha - 2bc(\sin\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial b} = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{\partial\alpha}{\partial b} = \frac{c\cos\alpha - b}{bc\sin\alpha}.$$

**Svar:** Funktionen $\alpha = \alpha(a, b, c)$ ges implicit av ekvationen $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha = 0$ och

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a} = \frac{a}{bc\sin\alpha}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial b} = \frac{c\cos\alpha - b}{bc\sin\alpha}.$$

6. (4 poäng) Beräkna

$$\iiint_K xze^{y+z^2}\,dxdydz$$

där

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2,\, 0 \le z \le 1\}.$$

**Lösning:** Vi beräknar

$$\begin{aligned}\iiint_K xze^{y+z^2}\,dxdydz &= \int_0^1\int_0^2\int_0^1 xe^y ze^{z^2}\,dxdydz\\ &= \Big(\int_0^1 x dx\Big)\Big(\int_0^2 e^y dy\Big)\Big(\int_0^1 ze^{z^2}dz\Big)\\ &= \frac{1}{2}(e^2-1)\Big[\frac{1}{2}e^z\Big]_0^1 = \frac{(e^2-1)(e-1)}{4}.\end{aligned}$$

**Svar:** $\frac{(e^2-1)(e-1)}{4}$.

7. (4 poäng) (a) Är $\mathbf{u} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z)$ ett potentialfält?

**Lösning:** Detta är uppgift 10.62 i övningsboken. Vi söker en potential $U(x,y,z)$ sådan att $\nabla U = \mathbf{u}$, dvs

$$U'_x = 2xy^2z, \qquad U'_y = 2x^2yz, \qquad U'_z = x^2y^2 - 2z.$$

Integration av ekvationen för $U'_x$ ger $U = x^2y^2z + f(y,z)$ där $f(y,z)$inte beror på $x$. Sätter vi in detta i ekvationerna för $U'_y$ och $U'_z$ blir dessa

$$2x^2yz + f'_y(y,z) = 2x^2yz \quad \text{och} \quad x^2y^2 + f'_z(y,z) = x^2y^2 - 2z.$$

Dessa ekvationer är uppfyllda om vi väljer $f(y,z) = -z^2$. Alltså är

$$U(x,y,z) = x^2y^2z - z^2$$

en potential till $\mathbf{u}$. Så $\mathbf{u}$ är ett potentialfält.
**Svar:** $\mathbf{u}$ är ett potentialfält.

(b) Beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

längs kurvan $\gamma$ given av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

**Lösning:** Kurvan $\gamma$ börjar i punkten $(\cos 0, \sin 0, \sin 0) = (1,0,0)$ och slutar i punkten $(\cos(\pi/2), \sin(\pi/2), \sin(\pi/2)) = (0,1,1)$. Det följer att integralen har värdet

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = U(0,1,1) - U(1,0,0) = -1 - 0 = -1.$$

**Svar:** $-1$.

8. (4 poäng) Ytan $S$ består av den delen av paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ som ligger under planet $z = 1$ orienterad så att normalvektorn $\mathbf{N}$ får positiv $z$-komponent. Bestäm flödet av vektorfältet $\nabla \times \mathbf{F}$ genom $S$ där $\mathbf{F} = (y, -xz, xz^2)$.

**Lösning:** Enligt Stokes' sats så ges flödet av

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Randen $\partial S$ till ytan $S$ är skärningen av paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ med planet $z = 1$, dvs

$$\partial S = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 = 1\}.$$

Då

$$\mathbf{r}(t) = \Big(\cos t, \frac{1}{2} \sin t, 1\Big), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

är en parametrisering av $\partial S$, följer det att flödet ges av

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{2} \sin t, -\cos t, \cos t\Big) \cdot \Big(-\sin t, \frac{1}{2} \cos t, 0\Big) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{2} \sin^2 t - \frac{1}{2} \cos^2 t\Big) dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = -\pi.
\end{aligned}$$

**Svar:** Flödet är $-\pi$.

9. (4 poäng) Beräkna

$$\iint_D e^{(x+y)^2} dx dy$$

där $D$ är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

**Lösning:** Sätt $g(x, y) = x + y$ och $G_u = \{(x, y) \in D \,|\, g(x, y) \leq u\}$. Låt $A(u)$ vara arean av $G_u$. Då är $A(u) = \frac{u^2}{2}$. Med $h(u) = e^{u^2}$ kan integranden skrivas

$$e^{(x+y)^2} = h(g(x, y)).$$

Enligt teorin för integration med hjälp av nivåkurvor blir

$$\iint_D e^{(x+y)^2} dx dy = \int_0^1 h(u) A'(u) du = \int_0^1 e^{u^2} u du = \frac{e^{u^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e - 1}{2}.$$

**Svar:** $\frac{e-1}{2}$.

10. (4 poäng) Låt $Y$ vara ytan som erhålls då en cirkel i $xz$-planet med radie 2 och mittpunkt $(3, 0, 0)$ roteras kring $z$-axeln.

(a) Bestäm arean av $Y$.

**Lösning:** Cirkeln i $xz$-planet med radie 2 och mittpunkt $(3, 0, 0)$ har parametrisering

$$(x, y, z) = (3 + 2 \cos t, 0, 2 \sin t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Det följer att ytan $Y$ parametriseras av

$$\mathbf{r}(\varphi, t) = ((3+2\cos t)\cos\varphi, (3+2\cos t)\sin\varphi, 2\sin t), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Vi har

$$\mathbf{r}'_\varphi = (-(3+2\cos t)\sin\varphi, (3+2\cos t)\cos\varphi, 0)$$

och

$$\mathbf{r}'_t = (-2\sin t\cos\varphi, -2\sin t\sin\varphi, 2\cos t)$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t = \big(&6\cos t\cos\varphi + 4\cos^2 t\cos\varphi, 6\cos t\sin\varphi + 4\cos^2 t\sin\varphi,\\ &2\sin t\cos\varphi(3+2\cos t)\cos\varphi 2\sin t\sin\varphi(3+2\cos t)\sin\varphi\big) \qquad (2)\\ = \big(&(6\cos t + 4\cos^2 t)\cos\varphi, (6\cos t + 4\cos^2 t)\sin\varphi, 6\sin t + 4\sin t\cos t\big).\end{aligned}$$

Vi finner följande areaelement:

$$\begin{aligned}dS &= |\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t| d\varphi dt\\ &= \sqrt{(6\cos t + 4\cos^2 t)^2\cos^2\varphi + (6\cos t + 4\cos^2 t)^2\sin^2\varphi + (6\sin t + 4\sin t\cos t)^2} d\varphi dt\\ &= \sqrt{(6\cos t + 4\cos^2 t)^2 + (6\sin t + 4\sin t\cos t)^2} d\varphi dt\\ &= \sqrt{36\cos^2 t + 24\cos^3 t + 16\cos^4 t + 36\sin^2 t + 24\sin^2 t\cos t + 16\sin^2 t\cos^2 t} d\varphi dt\\ &= \sqrt{36 + 24\cos t + 16\cos^2 t} d\varphi dt\\ &= (6 + 4\cos t) d\varphi dt.\end{aligned}$$

Detta medför

$$\text{Area}(Y) = \iint_Y dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(6+4\cos t)d\varphi dt = 2\pi\int_0^{2\pi}(6+4\cos t)dt = 24\pi^2.$$

**Svar:** $Y$ har area $24\pi^2$.

(b) Beräkna ytintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} dS$$

där $\mathbf{F} = (0, 0, z/2)$ och orienteringen är sådan att den positiva enhetsnormalen i punkten $(5, 0, 0) \in Y$ har positiv $x$-komponent.

**Lösning:** För $\varphi = t = 0$ har vi $\mathbf{r}(0,0) = (5,0,0)$. Sätter vi $\varphi = t = 0$ i ekvation (2) finner vi att $\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t = (10, 0, 0)$ då $(\varphi, t) = (0, 0)$. Alltså pekar $\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t$ och $\mathbf{N}$ åt samma riktning (detta kan även inses geometriskt). Med andra ord $\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t$ är en positivt orienterad normal och vi kan skriva det vektoriella areaelementet som

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS = (\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t)d\varphi dt.$$

å andra sidan är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\varphi, t)) = (0, 0, \sin t).$$

Detta innebär att

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(0,0,\sin t)\cdot\big((6\cos t+4\cos^2 t)\cos\varphi,(6\cos t+4\cos^2 t)\sin\varphi,\\ &\qquad 6\sin t+4\sin t\cos t\big)d\varphi dt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t(6\sin t+4\sin t\cos t)d\varphi dt\\ &= 2\pi\int_0^{2\pi}(6\sin^2 t+4\sin^2 t\cos t)dt\\ &= 2\pi\int_0^{2\pi}\Big(6\frac{1-\cos(2t)}{2}+4\sin^2 t\cos t\Big)dt\\ &= 2\pi\Big[3t-\frac{3}{2}\sin(2t)+\frac{4}{3}\sin^3 t\Big]_0^{2\pi}\\ &= 12\pi^2.\end{aligned}$$

**Svar:** $12\pi^2$.

**Alternativ lösning:** Vi har $\operatorname{div}\mathbf{F}=1/2$, så divergenssatsen ger

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS=\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}dV=\frac{1}{2}\text{Volym}(K),$$

där $K$ är volymen innesluten av $Y$ och normalen $\mathbf{N}$ är utåtriktad. Ytan $Y$ erhålls genom att rotera grafen av $f(r)=\sqrt{2^2-(r-3)^2}$ runt $z$-axeln där $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Skalmetoden för en rotationskropp ger således

$$\text{Volym}(K)=\int_1^5 2f(r)2\pi r dr=4\pi\int_1^5 r\sqrt{4-(r-3)^2}dr.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\int r\sqrt{4-(r-3)^2}dr &= \int (r-3)\sqrt{4-(r-3)^2}dr+3\int\sqrt{4-(r-3)^2}dr\\ &= -\frac{1}{3}(4-(r-3)^2)^{3/2}+3\int\sqrt{4-(r-3)^2}dr\end{aligned}$$

och den sista integralen i högerledet kan beräknas med variabelbytet $r-3=2\sin s$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{4-(r-3)^2}dr &= \int\sqrt{4-4\sin^2 s}2\cos s ds=4\int\cos^2 s ds\\ &= 2s+2\cos s\sin s\\ &= 2\arcsin\left(\frac{r-3}{2}\right)+(r-3)\sqrt{1-\sin^2 s}\\ &= 2\arcsin\left(\frac{r-3}{2}\right)+\frac{r-3}{2}\sqrt{4-(r-3)^2}.\end{aligned}$$

Alltså finner vi

$$\text{Volym}(K)=4\pi\Big[-\frac{1}{3}(4-(r-3)^2)^{3/2}+6\arcsin\left(\frac{r-3}{2}\right)+3\frac{r-3}{2}\sqrt{4-(r-3)^2}\Big]_1^5=24\pi.$$

Alltså får vi återigen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS=12\pi^2$.