KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Torsdag, 9 juni 2016

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Planet H_1 ges av ekvationen $3x+2y+2z=0$, och H_2 ges av ekvationen $x+2y-2z=0$. Linjen L är skärningen av H_1 och H_2.
   (a) Bestäm en bas för skärningslinjen L. **(2 p)**
   (b) Avgör om linjen L är med i delrummet $V = \text{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, där **(2 p)**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Klimatstatistiken visar att vintermedeltemperaturen i Stockholms län förändras enligt följande tabell (temperaturen är avrundat till heltal grader)

Period 0 (1961-1970)	$-5°C$
Period 1 (1971-1980)	$-2°C$
Period 2 (1981-1990)	$-3°C$
Period 3 (1991-2000)	$-1°C$
Period 4 (2001-2010)	$-1°C$

   Bestäm en funktion på formen $T(k) = Ak + B$ som stämmer bäst med dessa värden i minstakvadratmening. Här är k nummer av perioden och $T(k)$ är medeltemperaturen i period k.
   (4 p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen A. **(2 p)**
   (b) Beräkna $A^{11}\vec{v}$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

DEL B

4. Låt U vara lösningsmängden, i $\mathbb{R}^3$, av ekvationen $2x + y = 0$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 115 \end{bmatrix}$.
   (a) Bestäm en ortonormalbas β till U **(2 p)**
   (b) Utvidga basen β till en ortonormalbas för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**
   (c) Bestäm vektorn $\text{proj}_U(\vec{v})$. **(1 p)**

5. Finns det något värde på a för vilket de tre planen

$$ax + y - z = 1, \quad y + 2z = 7, \quad x + z = 2,$$

   har en rät linje gemensam? Bestäm i så fall för alla sådana a denna linjes ekvation på parameterform. **(4 p)**

6. Avbildningen $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en rotation med följande egenskaper: rotationsaxeln l är linjen $x_1 = x_2 = x_3$; positiva x_1-axeln avbildas till positiva x_2-axeln; positiva x_2-axeln avbildas till positiva x_3-axeln; positiva x_3-axeln avbildas till positiva x_1-axeln.
   (a) Bestäm matrisrepresentationen av avbildningen R i standardbas. **(1 p)**
   (b) Bestäm alla egenvärdena och egenvektorer av avbildningen. **(1 p)**
   (c) I planet som är vinkelrätt mot linjen l verkar avbildningen R som en rotation. Bestäm rotationsvinkeln. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Bestäm en 2×2-matris A vars nollrum och kolonnrum överensstämmer. **(2 p)**
   (b) Visa att det inte finns någon 3×3-matris med ovanstående egenskap. **(2 p)**

8. Bestäm vilka samband mellan talen a, b, c som krävs för att matrisen
$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$
blir diagonaliserbar. **(4 p)**

9. Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum och $L\colon V \to V$ en linjär avbildning som uppfyller att $L(L(v)) = L(v)$ för alla $v \in V$.
   (a) Visa att den enda vektor som ligger i både $\mathrm{Range}(L)$ och $\mathrm{Null}(L)$ är nollvektorn. **(2 p)**
   (b) Visa att det finns en bas $\mathcal{B}$ till V sådant att matrisrepresentationen av L m.a.p. basen $\mathcal{B}$ är en diagonalmatris där alla diagonalelement är antingen 0 eller 1. **(2 p)**