

**SF1625 Envariabelanalys**  
**Lösningsförslag till tentamen 2012-10-24**

1. Derivera nedanstående funktioner med avseende på  $x$  och ange för vilka  $x$  derivatan existerar. Endast svar krävs.

A.  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

B.  $g(x) = 2^x$

C.  $h(x) = xe^{-x^2}$

D.  $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

*Lösning.* A.  $f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + 1}$ . Existerar för alla  $x \neq 0$ .

B.  $g'(x) = 2^x \cdot \ln 2$ . Existerar för alla  $x$

C.  $h'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ . Existerar för alla  $x$

D.  $k'(x) = \frac{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}(\ln x)^2}$ . Existerar för alla  $x > 0$  sådana att  $x \neq 1$  □

**Svar:** Se lösningen.

2. Beräkna nedanstående integraler och förenkla svaren så långt som möjligt.

A.  $\int \tan x \, dx$  (använd substitutionen  $u = \cos x$ )

B.  $\int x^2 \cos x \, dx$  (använd upprepad partiell integration)

*Lösning.* A. Vi använder substitutionen  $u = \cos x$  med  $du = -\sin x \, dx$  och får

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} x \, dx = - \int \frac{1}{u} du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$$

där  $C$  är en godtycklig konstant.

B. Med upprepad partiell integration får vi

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

□

**Svar:** A.  $-\ln |\cos x| + C$

B.  $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

3. Avgör om funktionen  $f(x) = |2x - 1| + \arcsin x$  antar något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.

*Lösning.* Definitionsmängden till  $f$  är de  $x$  som uppfyller  $-1 \leq x \leq 1$ . Vi observerar att  $f$  är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet, så ett största och ett minsta värde måste existera. Dessa kan antas i kritiska punkter, singulära punkter och ändpunkter till intervallet. Vi noterar att

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 + \arcsin x, & \text{om } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1 - 2x + \arcsin x & \text{om } -1 \leq x < 1/2 \end{cases}$$

Vi deriverar och får

$$f'(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{om } 1/2 < x < 1 \\ -2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{om } -1 < x < 1/2 \end{cases}$$

Derivata saknas i punkten  $x = 1/2$ , som alltså är en singulär punkt. Vi ser att  $f'(x) > 0$  på intervallet  $1/2 < x < 1$  så  $f$  saknar kritiska punkter i detta intervall. På intervallet  $-1 < x < 1/2$  är  $f'(x) = 0$  om  $x = -\sqrt{3}/2$ , vilket alltså är den enda kritiska punkten.

Det följer av ovanstående att  $f$  säkert har ett största och ett minsta värde och att dessa måste antas i någon av punkterna  $-1$ ,  $-\sqrt{3}/2$ ,  $1/2$  och  $1$ . Vi jämför funktionsvärdena i dessa punkter:

$$f(-1) = 3 - \frac{\pi}{2}, \quad f(-\sqrt{3}/2) = \sqrt{3} + 1 - \frac{\pi}{3}, \quad f(1/2) = \frac{\pi}{6}, \quad f(1) = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

Vi får att  $f$ :s största värde är  $1 + \pi/2$  och  $f$ :s minsta värde är  $\pi/6$  □

**Svar:** Det största värdet är  $1 + \pi/2$  och det minsta värdet är  $\pi/6$

4. Antag att funktionen  $f$  är tre gånger deriverbar på hela reella axeln. Antag vidare att  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = -3$  och  $|f''(x)| \leq 5$  för alla  $x$ .

A. Bestäm ett närmevärde till  $f(1.1)$  med hjälp av linjär approximation (Taylorpolynom av grad 1).

B. Bestäm så noggrant som möjligt en gräns för felet i ditt närmevärde.

*Lösning.* Med hjälp av Taylors formel (linjär approximation) fås att

$$f(x) \approx 2 - 3(x - 1), \quad \text{för } x \text{ nära } 1.$$

Felet i approximationen ges som  $\frac{f''(c)}{2!}x^2$  för något  $c$  mellan 1 och  $x$ .

Med  $x = 1.1$  ger detta att

$$f(1.1) \approx 2 - 3(1.1 - 1) = 1.7.$$

Det sökta närmevärdet är alltså 1.7.

Felet i approximationen är till beloppet högst  $\frac{5}{2!}0.1^2 = 0.025$ . □

**Svar:** A. 1.7. B. 0.025

## 5. Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

(För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.)

*Lösning.* Vi beräknar integralen exakt med hjälp av partiell integration i första steget:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx &= [x \arctan x]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - [(1/2) \ln(1+x^2)]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2. \end{aligned}$$

(Den som vill beräkna integralen approximativt kan göra på flera sätt, t ex Taylorutveckla integranden eller använda Riemannsumma eller trapetsregeln)

□

**Svar:**

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2$$

6. Betrakta kurvan som ges av ekvationen  $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 10$ .
- Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten  $(x_0, y_0) = (-1, 2)$ .
  - Bestäm med hjälp av tangenten ett närmevärde för  $y$ -koordinaten till en punkt på kurvan vars  $x$ -koordinat är  $-0.8$ .
  - Kan det finnas mer än en punkt på kurvan som har  $x$ -koordinat  $-0.8$ ?

*Lösning.* A. Punkten  $(-1, 2)$  uppfyller ekvationen så den ligger på kurvan. Vi antar att  $y = y(x)$  och deriverar implicit. Vi får

$$4x + 4y(x) + 4xy'(x) + 6y(x)y'(x) + 2y'(x) = 0$$

vilket om  $x = -1$  och  $y = 2$  ger oss

$$-4 + 8 - 4y'(-1) + 12y'(-1) + 2y'(-1) = 0.$$

Här kan vi lösa ut  $y'(-1)$ . Vi får

$$4 + 10y'(-1) = 0$$

eller med andra ord  $y'(-1) = -2/5$ . Med hjälp av enpunktsformeln för linjens ekvation får vi till sist tangentens ekvation som

$$y - 2 = -\frac{2}{5}(x + 1)$$

B. Vi approximerar kurvan med tangenten och får

$$y \approx 2 - \frac{2}{5}(-0.8 + 1) = 2 - \frac{0.4}{5} = 1.92.$$

C. Vi sätter in  $x = -1$  i ekvationen och använder lösningsformeln för andragradsekvationen och får

$$2 - 4y + 3y^2 + 2y = 10 \iff y = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3}$$

vilket betyder att det finns två punkter på kurvan med  $x$ -koordinat  $-1$ . (Kurvan är en ellips)  $\square$

**Svar:** A.  $y - 2 = -\frac{2}{5}(x + 1)$ . B 1.92. C. Ja

7. Betrakta funktionen  $f$  som ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{när } x \neq 0 \\ 1 & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

- A. Är  $f$  udda? Är  $f$  jämn?
- B. I vilka punkter är  $f$  kontinuerlig?
- C. I vilka punkter är  $f$  deriverbar?
- D. Är  $f$  integrerbar på intervallet  $-\pi \leq x \leq \pi$ ?

*Lösning.* A. Eftersom  $f(0) \neq 0$  så kan  $f$  inte vara udda. Vi ser att för  $x \neq 0$  så är  $f(-x) = \sin(-x)/(-x) = \sin x/x = f(x)$  så  $x$  är alltså jämn.

B. I alla punkter utom  $x = 0$  så ges  $f$  av ett elementärt uttryck, och alltså är  $f$  kontinuerlig i alla  $x \neq 0$ . Eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

så är  $f$  kontinuerlig i  $x = 0$  också. Vi har alltså att  $f$  är kontinuerlig i alla punkter.

C. För  $x \neq 0$  så får vi med kvotregeln att

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

så  $f$  är deriverbar i alla  $x \neq 0$ . Punkten 0 måste undersökas separat med derivatans definition. Vi får

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2/3! + \mathcal{O}(h^4)}{h} = 0.$$

Så vi ser att  $f$  är deriverbar i origo också och att  $f'(0) = 0$ . Vi har alltså att  $f$  är deriverbar i alla punkter.

D. Eftersom  $f$  är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet  $[-\pi, \pi]$  så följer att  $f$  är integrerbar över detta intervall.  $\square$

**Svar:** Se lösningen.

8. Bestäm det minsta tal  $M$  sådant att  $|f''(x)| \leq M$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ , om  $f(x) = \arctan x$ .

*Lösning.* Med  $f(x) = \arctan x$  fås  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  och  $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$  som existerar för alla reella tal  $x$ .

Vi ska alltså hitta det största värdet av funktionen  $g$  som ges av  $g(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$  för  $x \in \mathbb{R}$ . Vi deriverar och får

$$g'(x) = -2 \frac{(1+x^2)^2 - (1+x^2)4x^2}{(1+x^2)^4},$$

som existerar för alla  $x$ . Vi ser att  $g'(x) = 0 \iff x = \pm 1/\sqrt{3}$ . Teckenstudium av  $g'$  ger:

Om  $x < -1/\sqrt{3}$  så är  $g'(x)$  positivt. Slutsats:  $g$  är växande här.

Om  $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$  så är  $g'(x)$  negativt. Slutsats:  $g$  är avtagande här.

Om  $x > 1/\sqrt{3}$  så är  $g'(x)$  positivt. Slutsats:  $g$  är växande här.

Eftersom  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$  följer att  $g$  antar sitt största värde i  $-1/\sqrt{3}$ , där  $g(-1/\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}/(4/3)^2 = 3\sqrt{3}/8$ , och sitt minsta värde i  $1/\sqrt{3}$ , där  $g(1/\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}/8$ .

Alltså är  $M = 3\sqrt{3}/8$  det minsta tal sådant att  $|f''(x)| \leq M$  för alla  $x \in \mathbb{R}$

□

**Svar:**  $3\sqrt{3}/8$



9. Kurvorna  $y = x^{2/3}$  och  $y = x^{3/2}$  begränsar ett område i första kvadranten. Beräkna längden av områdets begränsningskurva.

*Lösning.* Områdets begränsningskurva består av två delar. De båda kurvorna skär varandra när  $x^{2/3} = x^{3/2}$  dvs när  $x = 0$  och när  $x = 1$ . Eftersom  $f(x) = x^{2/3}$  och  $g(x) = x^{3/2}$  är varandras inverser (man kontrollerar lätt att  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ ) så är de båda kurvorna lika långa. Det räcker alltså att räkna ut den ena, t ex längden av  $y = x^{3/2}$  när  $0 \leq x \leq 1$ . Den har längden:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[ \frac{(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}}{27/8} \right]_0^1 = \frac{13^{3/2} - 8}{27}$$

Längden av områdets begränsningskurva är nu  $2L$ , dvs

$$2 \frac{13^{3/2} - 8}{27}.$$

□

**Svar:**  $2 \frac{13^{3/2} - 8}{27}$

---