SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2016-06-10

1. Derivera nedanstående funktioner med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar. Endast svar krävs.

   A. $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

   B. $g(x) = 2^x$

   C. $h(x) = xe^{-x^2}$

   D. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

Lösning. A. $f'(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2+1}$. Existerar för alla $x \neq 0$.

B. $g'(x) = 2^x \cdot \ln 2$. Existerar för alla x

C. $h'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$. Existerar för alla x

D. $k'(x) = \dfrac{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 2}{2\sqrt{x}(\ln x)^2}$. Existerar för alla $x > 0$ sådana att $x \neq 1$ $\square$

Svar: Se lösningen.

2. Beräkna nedanstående integraler och förenkla svaren så långt som möjligt.

   A. $\int \tan x \, dx$ (använd substitutionen $u = \cos x$)

   B. $\int x^2 \cos x \, dx$ (använd upprepad partiell integration)

Lösning. A. Vi använder substitutionen $u = \cos x$ med $du = -\sin x \, dx$ och får

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} x \, dx = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

där C är en godtycklig konstant.

B. Med upprepad partiell integration får vi

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

$\square$

Svar: A. $-\ln|\cos x| + C$

B. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

3. Avgör om funktionen $f(x) = |2x-1| + \arcsin x$ antar något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.

Lösning. Definitionsmängden till f är de x som uppfyller $-1 \leq x \leq 1$. Vi observerar att f är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet, så ett största och ett minsta värde måste existera. Dessa kan antas i kritiska punkter, singulära punkter och ändpunkter till intervallet. Vi noterar att

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1+\arcsin x, & \text{om } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1-2x+\arcsin x & \text{om } -1 \leq x < 1/2 \end{cases}$$

Vi deriverar och får

$$f'(x) = \begin{cases} 2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{om } 1/2 < x < 1 \\ -2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{om } -1 < x < 1/2 \end{cases}$$

Derivata saknas i punkten $x = 1/2$, som alltså är en singulär punkt. Vi ser att $f'(x) > 0$ på intervallet $1/2 < x < 1$ så f saknar kritiska punkter i detta intervall. På intervallet $-1 < x < 1/2$ är $f'(x) = 0$ omm $x = -\sqrt{3}/2$, vilket alltså är den enda kritiska punkten.

Det följer av ovanstående att f säkert har ett största och ett minsta värde och att dessa måste antas i någon av punkterna -1, $-\sqrt{3}/2$, $1/2$ och 1. Vi jämför funktionsvärdena i dessa punkter:

$$f(-1) = 3-\frac{\pi}{2}, \quad f(-\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}+1-\frac{\pi}{3}, \quad f(1/2) = \frac{\pi}{6}, \quad f(1) = 1+\frac{\pi}{2}.$$

Vi får att f:s största värde är $1+\pi/2$ och f:s minsta värde är $\pi/6$ □

Svar: Det största värdet är $1+\pi/2$ och det minsta värdet är $\pi/6$

4. Antag att funktionen f är tre gånger deriverbar på hela reella axeln. Antag vidare att $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ och $|f''(x)| \leq 5$ för alla x.
   A. Bestäm ett närmevärde till $f(1.1)$ med hjälp av linjär approximation (Taylorpolynom av grad 1).
   B. Bestäm så noggrant som möjligt en gräns för felet i ditt närmevärde.

Lösning. Med hjälp av Taylors formel (linjär approximation) fås att

$$f(x) \approx 2 - 3(x-1), \qquad \text{för } x \text{ nära } 1.$$

Felet i approximationen ges som $\dfrac{f''(c)}{2!}(x-1)^2$ för något c mellan 1 och x.

Med $x = 1.1$ ger detta att

$$f(1.1) \approx 2 - 3(1.1 - 1) = 1.7.$$

Det sökta närmevärdet är alltså 1.7.

Felet i approximationen är till beloppet högst $\dfrac{5}{2!}0.1^2 = 0.025$. □

Svar: A. 1.7. B. 0.025

5. Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

(För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.

Lösning. Vi beräknar integralen exakt med hjälp av partiell integration i första steget:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx &= [x \arctan x]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - [(1/2)\ln(1+x^2)]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2.\end{aligned}$$

(Den som vill beräkna integralen approximativt kan göra på flera sätt, t ex Taylorutveckla integranden eller använda Riemannsumma eller trapetsregeln)

□

Svar:
$\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2$

6. Betrakta kurvan som ges av ekvationen $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 10$.
   A. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.
   B. Bestäm med hjälp av tangenten ett närmevärde för y-koordinaten till en punkt på kurvan vars x-koordinat är -0.8.
   C. Kan det finnas mer än en punkt på kurvan som har x-koordinat -0.8?

Lösning. A. Punkten $(-1, 2)$ uppfyller ekvationen så den ligger på kurvan. Vi antar att $y = y(x)$ och deriverar implicit. Vi får

$$4x + 4y(x) + 4xy'(x) + 6y(x)y'(x) + 2y'(x) = 0$$

vilket om $x = -1$ och $y = 2$ ger oss

$$-4 + 8 - 4y'(-1) + 12y'(-1) + 2y'(-1) = 0.$$

Här kan vi lösa ut $y'(-1)$. Vi får

$$4 + 10y'(-1) = 0$$

eller med andra ord $y'(-1) = -2/5$. Med hjälp av enpunktsformeln för linjens ekvation får vi till sist tangentens ekvation som

$$y - 2 = -\frac{2}{5}(x + 1)$$

B. Vi appoximerar kurvan med tangenten och får

$$y \approx 2 - \frac{2}{5}(-0.8 + 1) = 2 - \frac{0.4}{5} = 1.92.$$

C. Vi sätter in $x = -0.8$ i ekvationen och använder lösningsformeln för andragradsekvationen och får

$$2 \cdot 0.64 - 3.2y + 3y^2 + 2y = 10 \iff y = 0.2 \pm \sqrt{8.76}$$

vilket betyder att det finns två punkter på kurvan med x-koordinat -0.8. (Kurvan är en ellips) $\square$

Svar: A. $y - 2 = -\frac{2}{5}(x + 1)$. B 1.92. C. Ja

7. Betrakta funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{när } x \neq 0 \\ 1 & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

A. Är f udda? Är f jämn?
B. I vilka punkter är f kontinuerlig?
C. I vilka punkter är f deriverbar?
D. Är f integrerbar på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$?

Lösning. A. Eftersom $f(0) \neq 0$, så kan f inte vara udda . Vi ser att för $x \neq 0$ gäller att $f(-x) = \sin(-x)/(-x) = \sin x/x = f(x)$ så f är alltså jämn.

B. För alla $x \neq 0$, så är f given av ett elementärt uttryck och alltså är f kontinuerlig i alla $x \neq 0$. Eftersom

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

så är f kontinuerlig i $x = 0$ också. Dvs f är kontinuerlig överallt.

C. För $x \neq 0$ har vi med kvotregeln att

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

så f är deriverbar för alla $x \neq 0$. Punkten 0 måste undersökas separat med derivatans definition:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2/3! + \mathcal{O}(h^4)}{h} = 0.$$

Vi ser att f är deriverbar i origo också och $f'(0) = 0$. Dvs f är deriverbar överallt.

D. Eftersom f är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet $[-\pi, \pi]$ så följer att f är integrerbar på detta intervall

$\square$

Svar: Se lösningen

8. Bestäm det minsta tal M sådant att $|f''(x)| \leq M$ för alla $x \in \mathbb{R}$, om $f(x) = \arctan x$.

Lösning. Med $f(x) = \arctan x$ fås $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ och $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ som existerar för alla reella x.

Vi ska alltså hitta det största värdet av absolutbeloppet av funktionen g given av $g(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ för $x \in \mathbf{R}$. Vi deriverar och får

$$g'(x) = -2\frac{(1+x^2)^2 - (1+x^2)4x^2}{(1+x^2)^4},$$

som existerar för alla rella x. Vi ser att $g'(x) = 0 \iff x = \pm 1/\sqrt{3}$. Teckenstudium av g' ger:

Om $x < -1/\sqrt{3}$ så är $g'(x)$ positivt. Slutsats: g är strängt växande här.

Om $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ så är $g'(x)$ negativt. Slutsats: g är strängt avtagande här.

Om $x > 1/\sqrt{3}$ så är $g'(x)$ positivt. Slutsats: g är strängt växande här.

Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ iså följer att g antar sitt största värde i $-1/\sqrt{3}$, där $g(-1/\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}/(4/3)^2 = 3\sqrt{3}/8$, och sitt minsta värde i $1/\sqrt{3}$, där $g(1/\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}/8$.

Alltså är $M = 3\sqrt{3}/8$ det minsta tal sådant att $|f''(x)| \leq M$ för alla $x \in \mathbf{R}$

$\square$

Svar: $3\sqrt{3}/8$

9. Kurvorna $y = x^{2/3}$ and $y = x^{3/2}$ begränsar ett område i första kvadranten. Beräkna längden av områdets begränsningskurva.

Lösning. Områdets begränsningskurva består av två delar som skär varandra när $x^{2/3} = x^{3/2}$ dvs när $x = 0$ och när $x = 1$. Eftersom $f(x) = x^{2/3}$ och $g(x) = x^{3/2}$ är varandras inverser (man kontrollerar lätt att $f(g(x)) = g(f(x)) = x$) är de båda kurvorna lika långa. Det räcker alltså att räkna ut den ena, t ex $y = x^{3/2}$ då $0 \leq x \leq 1$. Den har längden:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}}{27/8} \right]_0^1 = \frac{13^{3/2} - 8}{27}$$

Längden av områdets begränsningskurva är nu $2L$, dvs

$$2\frac{13^{3/2} - 8}{27}.$$

$\square$

Svar: $2\frac{13^{3/2}-8}{27}$