

KURSBUNT

**Matematikintroduktion för
bastermin**

**KTH STH Campus
Flemingsberg**

Tal

Räknelagar

Prioriteringsregler

I uttryck med flera räknesätt beräknas uttrycket i följande ordning:

1. Parenteser
2. Potenser
3. Multiplikation och division
4. Addition och subtraktion

Exempel: $5 + 3 \cdot 2(6 - 2)$

1. $= 5 + 3 \cdot 2(4)$
2. $= 5 + 3 \cdot 8 = 5 + 24$
3. $= 5 + 24 = 29$

Negativa tal

Två lika tecken ger plus och två olika tecken ger minus

$++$ ger + $--$ ger +
 $+-$ ger - $-+$ ger -

Bråk

Ett bråk består av:

$$\frac{\text{Täljare}}{\text{Nämnare}} = \text{kvot}$$

Förlängning

Vid förlängning multipliceras nämnare och täljare med samma tal.

Exempel: $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$

$\frac{3}{2}$ är alltså precis samma sak som $\frac{15}{10}$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{15}{10} = 1,5$$

Addition & subtraktion

1. Samma nämnare
2. Lägg ihop täljarna

Exempel: Vad är $\frac{4}{3} + \frac{5}{2}$?

Svar: För att få gemensamma nämnare får vi förlänga $\frac{4}{3}$ med 2, och $\frac{5}{2}$ med 3.

$$\frac{4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} + \frac{15}{6} = \frac{8 + 15}{6} = \frac{23}{6}$$

Multiplikation

Multipliceras nämnare med nämnare och täljare med täljare.

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{8 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{40}{21}$$

Division

Multiplicerar täljaren med nämnarens inverterade värde.

$$\frac{4}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

Inverterade värdet innebär att nämnaren och täljaren har bytt plats.

$$\frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{3} \quad \frac{4}{9} \rightarrow \frac{9}{4}$$

Algebra & Ekvationer

Algebra & Ekvationer

Parenteser

En parentes

När man multiplicerar en term med en parentes måste man multiplicera båda talen i parentesen.

Exempel: Förenkla uttrycket $4x(2x + 9)$.

$$4x(2x + 9) = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 9 = 8x^2 + 36x$$

Två parenteser

När man multiplicerar två parenteser med varandra multiplicerar man "alla med alla".

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Kvadreringsreglerna

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Konjugatregeln

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Det är viktigt att även kunna dessa regler från höger till vänster, alltså baklänges, då det är ett bra redskap när man faktorerar.

Faktorisera

Att faktorisera betyder att man skapar faktorer, alltså skapar gångertecken. Det vanligaste tillvägagångssättet är att man bryter ut en faktor, men ibland kan man använda konjugat- eller kvadreringsregeln baklänges.

Exempel: Faktorisera uttrycket $24x - 6x^2$

$$24x - 6x^2 =$$

$$4 \cdot 6x - 6x \cdot x =$$

$$6x(4 - x)$$

Bryta ut/faktorisera är motsatsen till att multiplicera in i en parentes. Därför kan vi kontrollräkna vårt svar genom att multiplicera in i parentesen igen.

Faktorisera med konjugat- och kvadreringsregeln

När man ska faktorisera ett uttryck och det inte finns någon gemensam faktor kan man testa att använda antingen konjugatregeln eller kvadreringsregeln baklänges.

Exempel: Faktorisera uttrycket $81 - x^2$.

Då vi har två kvadrater med ett minustecken emellan kan vi använda konjugatregeln för att faktorisera:

$$81 - x^2 = 9^2 - x^2 = (9 + x)(9 - x)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exempel: Faktorisera och förenkla uttrycket $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 4}$.

Uttrycket $x^2 - 4x + 4$ har ingen gemensam faktor, så vi har inget vi kan bryta ut. Vi kan däremot faktorisera med kvadreringsregeln.

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Svar: $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 4} = \frac{(x - 2)^2}{2(x - 2)} = \frac{x - 2}{2}$

Förstagsadekvationer

Om du ska lösa en ekvation måste du få x-variabeln ensam på ena sidan av likhetstecknet. För att göra detta kan du använda dig av de fyra räknesätten. Du kan använda dem hur du vill bara du gör **exakt samma sak på båda sidor**.

Plus på båda sidor

$$\begin{aligned} x - 5 &= 9 \\ x - 5 + 5 &= 9 + 5 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Minus på båda sidor

$$\begin{aligned} x + 7 &= 18 \\ x + 7 - 7 &= 18 - 7 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Dividera båda sidor

$$\begin{aligned} 3x &= 21 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Multiplisera båda sidor

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= 9 \\ \frac{2 \cdot x}{2} &= 2 \cdot 9 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Exempel: Lös ekvationen $\frac{4x-6}{7} = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{4x-6}{7} \cdot 7 &= 2 \cdot 7 \\ 4x - 6 &= 14 \\ 4x - 6 + 6 &= 14 + 6 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{20}{4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Svar:

$$x = 5$$

Potensekvationer

Innebär att x är upphöjt med ett tal.
T.ex. $x^5 = 243$

Målet är att få x:et fritt. För att få x:et fritt höjer man upp båda sidor med *exponentens inverterade värde*.

Exempel: $x^5 = 243$

$$(x^5)^{1/5} = 243^{1/5}$$

$$x^{5 \cdot (1/5)} = 243^{1/5}$$

$$x^1 = 3$$

Svar: $x = 3$

Kom ihåg:

- Vid en potensekvation höjer man upp båda sidor med exponentens inverterade värde.
- Om det är en *jämn exponent* finns det en negativ och en positiv lösning.
- Om det är en *udda exponent* finns det bara en lösning.

$$\begin{aligned} x^n &= C \\ x &= C^{1/n} \end{aligned}$$

Exponentialfunktioner

Logaritmer

Definitioner

$\lg 5$ är det tal 10 ska upphöjas med för att det ska bli 5

$$\lg 5 \approx 0,7 \rightarrow 10^{0,7} \approx 5$$

$$10^{\lg 5} = 5$$

Här har vi 10 upphöjt med det tal 10 ska upphöjas med för att det ska bli 5.

$$\begin{aligned} \lg x &= y \Leftrightarrow 10^y = x \\ x &= 10^{\lg x} \end{aligned}$$

Logaritmlagarna

Det finns tre logaritmlagar.

- $\log x + \log y = \log xy$
- $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$
- $\log x^y = y \cdot \log x$

Exempel: Lös ekvationen $\lg 25 + \lg 4 = x$.

Vi skriver om vänsterledet till en logaritm med logaritmlagarna: $\lg 25 + \lg 4 = x$

$$\lg(25 \cdot 4) = x$$

$$\lg 100 = x$$

Svar:

$$x = 2$$

Exempel: Lös ekvationen $1,28^{3x} = 5,2$.

$$\lg 1,28^{3x} = \lg 5,2$$

$$3x \cdot \lg 1,28 = \lg 5,2$$

$$x = \frac{\lg 5,2}{3 \cdot \lg 1,28}$$

Svar:

$$x \approx 2,23$$

Exponentialfunktioner

Exponentialfunktioner innebär att vi har en variabel som exponent. Exponentialfunktioner består vanligtvis av fyra element.

$$\text{Värde} \rightarrow y = C \cdot a^x \leftarrow \begin{array}{l} \text{Tid} \\ \text{Förändringsfaktor} \end{array}$$

Startvärde

Exponentialfunktioner används för att beskriva kontinuerliga procentuella förändringar.

Exempel: Petter sätter in 6000 kr på ett konto med en ränta på 3,2 %. När finns det 9 000 kr på kontot?

Lösning: Startvärdet är 6 000. Förändringsfaktor 1,032. Värde vi söker är 9 000 och tiden x är det vi vill räkna ut.

$$9\,000 = 6\,000 \cdot 1,032^x$$

$$1,032^x = 1,5$$

$$x = \frac{\log 1,5}{\log 1,032} \approx 12,87$$

Svar:

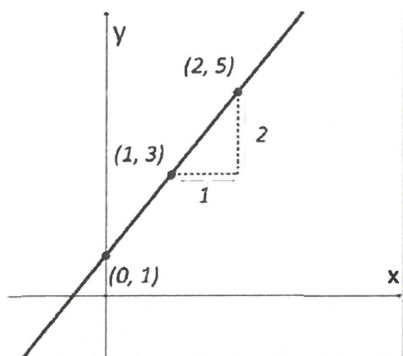
Efter ca 13 år.

Räta linjen

Räta linjens ekvation är $y = kx + m$

- k = linjens lutning
- m = skärningspunkt med y-axel

- Två linjer är parallella om $k_1 = k_2$
- Två linjer vinkelräta om $k_1 \cdot k_2 = -1$



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{skillnad i y-led}}{\text{skillnad i x-led}} = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

m = skärning med y-axeln = 1

$$y = 2x + 1$$

Från två koordinater till funktion

Linjens lutning, k -värde, fås av: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Exempel: En rät linje går genom punkterna (6, 1) och (9, 7). Bestäm linjens ekvation på formen $y = kx + m$

Steg 1. Bestäm linjens lutning

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{9-6} = \frac{6}{3} = 2$$

Steg 2. Sätt in en koordinat och k -värde på $y = kx + m$.

$$(6, 1) \rightarrow x = 6, y = 1$$

$$1 = 2 \cdot 6 + m$$

$$1 = 12 + m$$

$$m = 1 - 12 = -11$$

$$\text{Svar: } y = 2x - 11$$

Linjära ekvationssystem

Att lösa ett ekvationssystem betyder att man ska finna koordinaten för när linjerna korsar varandra.

Om linjerna

- skär varandra har ekvationssystemet en lösning
- är parallella har ekvationssystemet inga lösningar
- sammanfaller har ekvationssystemet oändligt många lösningar

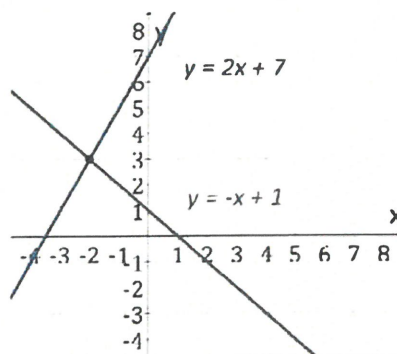
Det finns två sätt att lösa ett ekvationssystem algebraiskt (*Substitutionsmetoden* och *additionsmetoden*) samt ett sätt att lösa det grafiskt. Det räcker med att kunna en av de algebraiska metoderna.

Substitutionsmetoden är den metod som fungerar även på mer komplicerade ekvationer. Den andra metoden, additionsmetoden, fungerar i vissa fall bra, men överlag är substitutionsmetoden mycket bättre.

Grafisk lösning

Exempel: Lös ekvationssystemet grafiskt: $\begin{cases} y + x = 1 \\ y - 7 = 2x \end{cases}$

Vi måste nu rita linjerna. För att göra det måste vi bryta ut y för båda ekvationerna: $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$



Lösning är vid skärningspunkten, som har koordinaten (-2, 3).

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Substitutionsmetoden

Exempel: Lös följande ekvationssystem: $\begin{cases} 3y - 4x = 17 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$

Steg 1: Lös ut antingen x eller y i en av ekvationerna.

$$y - 5x = 2$$

$$y = 5x + 2$$

Steg 2: y är exakt samma sak som $5x + 2$. Då kan vi byta ut y i den andra ekvationen mot $5x + 2$.

$$3y - 4x = 17$$

$$3(5x + 2) - 4x = 17$$

$$15x + 6 - 4x = 17$$

$$11x = 11$$

$$x = 1$$

Steg 3: Nu vet vi x . Då kan vi räkna ut y .

$$y = 5x + 2$$

$$y = 5 \cdot 1 + 2$$

$$y = 7$$

Steg 4: Svar: Ekvationssystemet har lösningen $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$

Poängen med metoden är att gå från två ekvationer med två okända variabler (*går inte att lösa*) till endast en ekvation med en okänd variabel, vilket vi kan lösa.

1. Lös ut x eller y .
2. Sätt in uttrycket så du bara får en okänd.
3. Sätt in svaret och beräkna den andra.
4. Svara med x och y .

Andragsgradsfunktioner

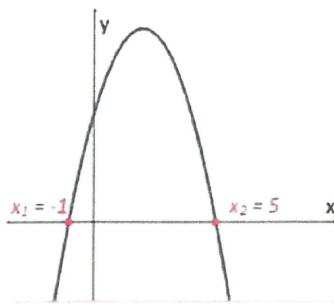
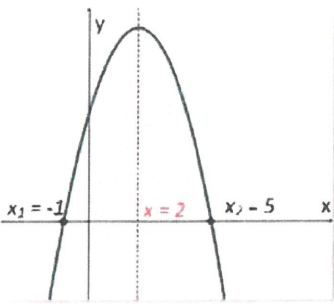
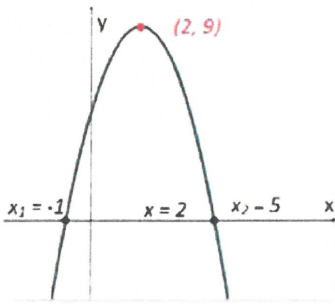
Andragsgradsekvationer

Det finns tre olika typer av andragsgradsekvationer. För varje typ finns det en lösningsmetod.

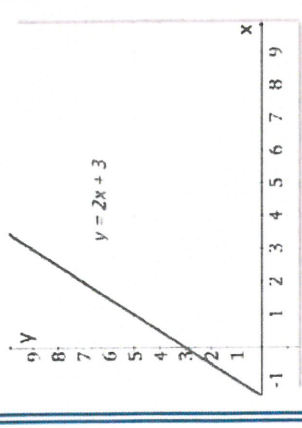
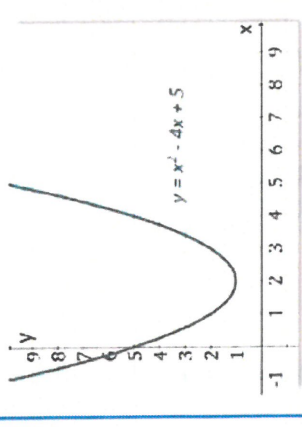
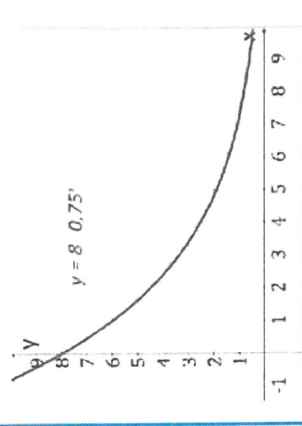
Fall 1: x^2 och tal $\rightarrow$ roten ur	Fall 2: x^2 och $x \rightarrow$ faktorisera	Fall 3: x^2 , x och tal $\rightarrow$ pq-formeln
$x^2 - 64 = 0$ $x^2 = 64$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$ $x = \pm 8$ $x_1 = 8$ $x_2 = -8$	$x^2 = -9x$ $x^2 + 9x = 0$ $x \cdot x + 9 \cdot x = 0$ $x(x+9) = 0$ $x_1 = 0$ $x + 9 = 0$ $x_2 = -9$ $x_1 = 0$ $x_2 = -9$	$2x^2 + 12x = -10$ $2x^2 + 12x + 10 = 0$ $\frac{2x^2 + 12x + 10}{2} = \frac{0}{2}$ $x^2 + 6x + 5 = 0$ $x^2 + px + q = 0$ $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 5}$ $x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$ $x = -3 \pm \sqrt{4}$ $x = -3 \pm 2$ $x_1 = -5$ $x_2 = -1$
1. x^2 ensamt 2. Dra roten ur	1. 0 i högerledet 2. Bryt ut x 3. 2 lösningar	1. 0 på ena sidan 2. x^2 ensamt 3. Hitta p & q 4. Använd formeln

Andragsgradsfunktioner – Tillämpningar

Det svåra med att lösa andragsgradsfunktioner är ofta att tolka frågan. Det finns tre typiska problem. Det gäller att identifiera frågan och därefter använda någon av de tre metoderna nedan.

Finna ekvationens nollställen	Finna ekvationens symmetrilinje	Finna ekvationens största/minsta värde
Exempel: $y = -x^2 + 4x + 5$ 1. Lös ekvationen: $y = -x^2 + 4x + 5 = 0$ $x^2 - 4x - 5 = 0$ $x = \frac{-(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)}$ $x = 2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$ $x = 2 \pm 3$ $x_1 = -1$ $x_2 = 5$	1. Lös ekvationen $x_1 = -1$ $x_2 = 5$ 2. Finn symmetrilinjen $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $x = 2$	1. Lös ekvationen $x_1 = -1$ $x_2 = 5$ 2. Finn symmetrilinjen $x = 2$ 3. Ta fram y-värde. $y(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = -4 + 8 + 5$ $y(2) = 9$
		
Följande frågor innebär samma sak: Lös funktionen, finn ekvationens rötter, finn funktionens nollställen, när skär grafen x-axeln etc.	När får funktionen sitt största/minsta värde, när når bollen sin högsta höjd, när tjänar affären maximalt etc.	Vad är funktionens största/minsta värde, hur högt når bollen, hur mycket tjänar de maximalt, bestäm simhopparens högsta höjd etc.

Översikt: Ekvationer och Funktioner – Matematik 2

Typ	Förstagsradsekvationer	Andragsradsekvationer	Potensekvationer	Exponentialfunktioner
Förklaring	Ekvationer där x är upphöjt med 1 (ingen exponent).	Ekvationer där x är upphöjt med 2.	Ekvationer där exponenten kan vara vilket tal som helst.	Ekvationer där man har x som exponent.
Exempel	$\frac{4x - 2}{5} = 10$	- Fall1: $x^2 = 64$ - Fall2: $x^2 - 5x = 0$ - Fall3: $x^2 - 4x - 5 = 0$	$x^{3.5} = 28$	$1,8^x = 40$
Lösningssmetod	De fyra räknesätten! $\frac{4x - 2}{5} = 10$ $5 \cdot \frac{4x - 2}{5} = 10 \cdot 5$ $4x - 2 + 2 = 50 + 2$ $\frac{4x}{4} = \frac{52}{4}$ $x = 13$	- Fall1: Kvadratroten ur! $x = \pm\sqrt{64}$ $x = \pm 8$ - Fall2: Bryt ut! $x(x - 5) = 0$ $x_1 = 0, x_2 = 5$ - Fall3: PQ-formeln! $x = \frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)}$ $x = 2 \pm 3$ $x_1 = -1, x_2 = 5$	Höj upp med exponentens inverterade värde! $x^{3.5} = 28$ $(x^{3.5})^{1/3.5} = 28^{1/3.5}$ $x = 28^{1/3.5}$ $x \approx 2,59$	Logaritmera för att få ner x! $1,8^x = 40$ $\log 1,8^x = \log 40$ $x \cdot \log 1,8 = \log 40$ $x = \frac{\log 40}{\log 1,8}$ $x \approx 6,28$
Grafen	Förstagsradsekvationer: Råta linjer. $y = kx + m$ Exempel: 	Andragsradsekvationer är parabler. $y = ax^2 + bx + c$ Exempel: 	*Ingår ej i kursen*	$y = C \cdot a^x$ Värde Startvärde Förändringsfaktor Tid Exempel: 

Diagnos 1.5

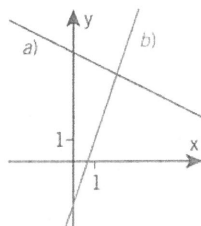
Algebra och linjära modeller kurs 2c

Repetition av algebra och funktioner

- 1 a) Förenkla uttrycket $2(x + 4) - 4(1 - 2x)$
b) Lös ekvationen $2(x + 4) - 4(1 - 2x) = 0$
- 2 Lös ut y ur sambandet $6x - 2y + 10 = 0$
- 3 Formeln $f(x) = 160 - 5x$ definierar en funktion. Förklara vad det är för skillnad mellan $f(10)$ och "x då $f(x) = 10$ ".

Räta linjens ekvation

- 4 Skriv upp en ekvation för den räta linjen som har $k = 2$ och $m = 5$ och förklara vad värdet på k och m betyder grafiskt.
- 5 En linje går genom punkten $(5, 7)$. Bestäm en annan punkt på linjen om lutningen är -3 .
- 6 Bestäm k -värdet för en linje som går genom punkterna $(3, -4)$ och $(-1, 8)$.
- 7 Bestäm ekvationen för en linje som går genom punkten $(-2, 5)$ och har $k = 3$.
- 8 Bestäm linjernas ekvationer.



- 9 Bestäm ekvationen för en linje som går genom punkten $(2, 3)$ och är parallell med $3x - 2y - 13 = 0$

- 10 Undersök om punkten $(1, 4 ; 7, 6)$ ligger på linjen $5x - 2y + 8 = 0$

- 11 Längden y cm av ett brinnande ljus minskar med tiden x timmar enligt formeln $y = 25 - 4,5x$
a) Vad betyder 25 i formeln?
b) Ange och tolka funktionens k -värde.
c) Hur lång tid tar det för ljuset att brinna upp?

- 12 Linjen $y = 3x - 7$ är vinkelrät mot en linje genom punkterna $(4, a)$ och $(-2, 1)$. Bestäm talet a .

Linjära ekvationssystem

- 13 Lös ekvationssystemet grafiskt. Svara med två decimaler.

$$\text{a) } \begin{cases} y = 4 - x \\ y = 2 - 4x \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + y - 2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

- 14 Lös ekvationssystemet exakt.

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2x - 2,7 \\ y = 8,5 - 5x \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = x - 10 \\ y = 2 - 4x \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 28 \\ 5x + 4y - z = 35 \end{cases}$$

- 15 En lastbil är lastad med lådor av två slag. Lasten väger 3810 kg och dess volym är 4000 liter.

	Volym	Vikt
Liten låda	25 l	30 kg
Stor låda	60 l	50 kg

Hur många små och hur många stora lådor består lasten av?

Diagnos 1.6

Algebra och icke-linjära modeller kurs 2c

Polynom

1 Utveckla och förenkla

- a) $(x + 1)(2x - 3)$ c) $(x - 4)^2$
b) $(2x - 3)(2x + 3)$ d) $(3x + 4)^2$

2 Utveckla och förenkla

- a) $x^2 + 2x + 2(x - 1)(x + 1)$
b) $(x + 9)^2 - (x - 9)^2$

3 Bryt ut största möjliga faktor

- a) $2x^2 + 6x$ b) $9x^2 - 3x$

4 Faktorisera

- a) $x^2 - 4$ b) $a^2 + 2ab + b^2$

Andragradsekvationer

Lös ekvationen utan räknare.

- 5 a) $4x^2 = 64$
b) $(2x - 8)(x + 3) = 0$

- 6 a) $x^2 - 10x + 16 = 0$
b) $3x^2 + 24x = 27$

7 Lös ekvationen $\sqrt{x + 2} = x - 4$

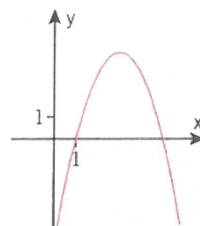
- a) algebraiskt
b) grafiskt.

- 8 a) Ge ett exempel på en andragradsekvation som saknar reella lösningar.
b) Beräkna din ekvations komplexa lösningar.

Andragradsfunktioner

9 Grafen visar en andragradsfunktion.

- a) Bestäm funktionens största värde.
b) Bestäm funktionen nollställen.
c) Bestäm funktionens symmetrilinje.



10 Har grafen till $y = 3x - x^2$ en maximi- eller minimipunkt. Motivera ditt svar.

11 Beräkna funktionens nollställen. Kontrollera grafiskt.

- a) $y = x^2 - 4x$ b) $y = -2x^2 + 4x - 4$

12 Bestäm symmetrilinje och största eller minsta värde för funktionen $y = x^2 - 6x + 10$.

13 Höjden y m för en boll som rört sig x m framåt kan beskrivas av funktionen $y = x - 0,04x^2$

- a) Vad är höjden då bollen rört sig 10 m framåt?
b) Hur långt från utgångspunkten slår bollen ner?

Exponentialfunktioner och logaritmer

14 Lös ekvationen

- a) $x^6 = 140$ ($x > 0$) b) $6^x = 140$

15 Bestäm utan räknare a) $\lg 100$ b) $\lg 0,1$

16 I en stad ökade invånarantalet med 5% varje år. Hur många år krävdes det för att invånarantalet skulle öka från 50 000 till 80 000?

Diagnos 2

Algebra och polynom

1 Utveckla och förenkla

a) $(2a + 3b)(2a - 3b) - 2a(2a - 3b)$

b) $3(x + h)^2 - 3x^2$

2 Förenkla

a) $a^{-2} \cdot a^{-4} + (2a^{-3})^2$

b) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

3 Beräkna utan räknare

a) $4^1 + 4^{0,5}$ b) $\sqrt{25} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

4 Lös ekvationen

a) $3x(2x + 6)(x - 1) = 0$

b) $9x^3 - 6x^2 + x = 0$

5 Skriv polynomet i faktorform

a) $p(x) = x^2 - 16x + 60$

b) $p(x) = -10x^2 + 50x - 60$

Rationella uttryck

6 $G(x) = \frac{x+1}{x(x+2)}$

a) Beräkna $G(-3)$

b) För vilket eller vilka värden på x är $G(x)$ inte definierat?

7 Förenkla

a) $\frac{14x-7}{2x-1}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{12}$

b) $\frac{2x^2-18}{x+3}$

d) $\frac{x-1}{1-x} + \frac{1+y}{y+1}$

8 Lös ekvationen

a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 24$

c) $\frac{x^2}{x-1} + 2 = \frac{1}{x-1}$

b) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = 3$

d) $\frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x+4} = 4$

9 Förenkla

a) $\frac{ab}{2} \cdot \frac{6b}{a}$

c) $\frac{2}{a} \div \frac{2-4a}{a^2}$

b) $\frac{ab}{2} \div \frac{6b}{a}$

d) $\frac{a^2-1}{3} \cdot \frac{6}{4a+4}$

Funktioner

10 Bestäm ekvationen för den linje som

a) har $k = 4$ och går genom punkten $(1, 8)$

b) går genom punkterna $(2, 6)$ och $(3, 4)$

c) är parallell med $y = 3x + 7$ och går genom $(2, 4)$.

11 Rita andragradskurvan (parabeln)

$y = 2x^2 - 8x - 24$

a) Ange symmetrilinjens ekvation.

b) Har kurvan en maximi- eller minimipunkt?

c) Ange extrempunktens koordinater.

d) Var skär grafen x -axeln?

e) Var skär grafen y -axeln?

12 Lös ekvationen. Svara dels exakt, dels med ett närmevärde med tre decimaler.

a) $2 \cdot x^5 = 12$

b) $2 \cdot 5^x = 12$

13 Ge ett exempel på en potensfunktion och på en exponentialfunktion för vilken gäller att $f(1) = 3$.

Hemuppgifter 1

1.1 Polynom

1 Förenkla

- a) $(a + h)(a - h) - 2a(a + h)$
 b) $4(x + 4)(x - 4) - (2x - 3)^2 - 2$
 c) $(x - 1)(2x + 5)(x - 1) + (4 - x)x$

2 Faktorisera

- a) $4x^2 - 16x^3$ c) $2z^2 - 98$
 b) $x^2 - 64$ d) $x^3 - 2x^2 + x$

3 Lös ut x .

- a) $y = 3h - 2x$ b) $\frac{a}{4x} = \frac{b}{2h}$

Lös ekvationen

- 4 a) $x^2 = 169$ c) $4x^2 - 12x = 0$
 b) $(x + 1)^2 = 9$ d) $x^2 - 12x + 20 = 0$

- 5 a) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ b) $5x^2 + 4x = 1$

6 Skriv en andragradsekvation som

- a) har rötterna -2 och 12 b) saknar reella rötter.

7 Lös ekvationen

- a) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$ genom att sätta $\sqrt{x} = t$
 b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ genom att sätta $x^2 = t$.

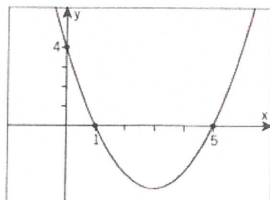
8 Lös ekvationen

- a) $\sqrt{x+2} = x-4$ b) $\sqrt{2x+15} = x$

9 Skriv polynomet i faktorform

- a) $p(x) = x^2 - 16x + 60$
 b) $p(x) = -10x^2 + 50x - 60$

- 10 Bestäm andragrads-polynomet vars graf figuren visar.



1.2 Rationella uttryck

- 11 $\frac{x+a}{x+b}$ är inte definierat för $x = 4$. För $x = 5$ har det värdet 12. Bestäm talen a och b .

Förenkla

- 12 a) $\frac{(x-1)}{4(x-1)}$ b) $\frac{6xy^2}{30xy}$
 13 a) $\frac{14x-7}{2x-1}$ b) $\frac{x+4}{x^2-16}$

- 14 a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{12}$ b) $\frac{3a}{5} + \frac{2a}{3} - \frac{a}{15}$

- 15 a) $\frac{2x^2-18}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{1-x} + \frac{1+y}{y+1}$

Lös ekvationen

- 16 a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 24$ b) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = 3$

- 17 a) $\frac{x^2}{x-1} + 2 = \frac{1}{x-1}$ b) $\frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x+4} = 4$

18 Förenkla

- a) $\frac{2}{a} \cdot \frac{2-4a}{a^2}$ b) $\frac{a^2-1}{3} \cdot \frac{6}{4a+4}$

1.3 Linjära och icke-linjära funktioner

- 19 $f(x) = 3x + x^2$. Beräkna $f(0) + f(1) + f(2)$.

- 20 $f(x) = 5 - x^2$. Förenkla $f(2+h) - f(2)$.

21 Bestäm lutningen k för en linje genom

- a) $(-2, -3)$ och $(2, -11)$
 b) $(6, 7)$ och $(13, 7)$

22 Bestäm ekvationen för den linje som

- a) har $k = 4$ och går genom punkten $(1, 8)$
 b) går genom punkterna $(2, 6)$ och $(3, 4)$
 c) är parallell med $6x - 2y + 3 = 0$ och går genom $(2, 4)$.

23 Bestäm nollställena till $y = x^2 + 6x + 9$

- a) algebraiskt
- b) grafiskt.
- c) ange symmetrilinje samt extrempunktens koordinater

24 Lös grafiskt

- a) ekvationen $2^x = 1 + 2x$
- b) olikheten $2^x < 1 + 2x$

1.4 Potenser

25 Förenkla med potenslagarna

- a) $a^{10} \cdot a^{-7}$
- b) $\frac{a^{15}}{a^{-4}}$
- c) $(4x^5)^3$
- d) $\frac{5+3^0}{x^{-2}}$

26 Förenkla $(5^{-x} + 5^x)^2 - 2$

27 Faktorisera $3^{x+2} - 3^x$

28 Förenkla utan räknare

- a) $125^{1/3}$
- b) $0,81^{1/2}$
- c) $9^{-0,5}$
- d) $4^{3/2}$

29 Lös ekvationen och svara med tre decimaler.

- a) $x^{10} = 8$
- b) $5,2 \cdot x^9 = 7,32$

30 Susanna köpte läkemedelsaktier för 25 000 kr. Fyra år senare sålde hon dem för 55 000 kr. Hur stor var värdestegringen i procent per år?

31 Axel köpte IT-aktier för 150 000 kr. Tre år senare sålde han dem för 50 000 kr. Hur stor var värdeminskningen i procent per år?

32 I sjukamp för damer beräknas poängen för löpning 800 m med potensfunktionen $P(t) = 0,11193 \cdot (254 - t)^{1,88}$ där t är tiden i sekunder.

- a) Vilken poäng ger tiden 2.14,0?
- b) Vilken tid ger 1 200 poäng?

1.5 Logaritmer

33 Bestäm utan räknare

- a) $\lg 100$
- b) $\lg 1$

34 Lös ekvationerna exakt.

- a) $10^x = 8$
- b) $\lg x = 3$

35 Skriv 4 i exakt form som en potens med basen 10.

36 Bestäm talet x ur likheterna

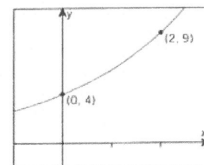
- a) $\lg 63 = \lg 7 + \lg x$
- b) $\lg \frac{239}{14} = \lg x - \lg 14$
- c) $\lg 3^{15} = x \cdot \lg 3$

37 Lös ekvationerna exakt och med ett närmevärde med tre decimaler.

- a) $6^x = 17$
- b) $4 \cdot 5^x = 6$
- c) $2,5 \cdot 3^{2x} = 6,8$
- d) $2^{-x} = 0,5$

38 Grafen visar

$y = C \cdot a^x$
Bestäm C och a .



39 Mängden av ett radioaktivt preparat avtar exponentiellt med tiden. Av 100 mg återstår bara hälften efter 30 år. Hur mycket återstår av 100 mg efter 1 år?

40 Folkmängden i ett land ökar exponentiellt med tiden. År 2000 var folkmängden 10,1 miljoner och år 2005 var den 11,8 miljoner. När uppgår folkmängden till 15 miljoner?

41 Skelettet av den sk Bäckaskogskvinnan hittades 1939 i en grav i nordöstra Skåne. Ett test visade nyligen att halten av kol-14 i skelettet var 34,8 % av den normala halten i levande material. När ungefär levde hon? Kol-14 sönderfaller med halveringstiden 5730 år.

Derivata

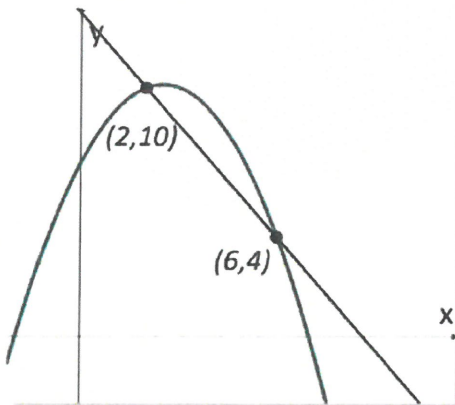
Sekanter & tangenter

- En sekant ger medelförändringen mellan två punkter.
- En tangent ger lutningen, derivatan, i en punkt.

Exempel: $f(x) = -0,5x^2 + 2,5x + 7$

- Bestäm medellutningen mellan $x = 2$ och $x = 6$.
- Bestäm lutningen i punkten $x = 5$.

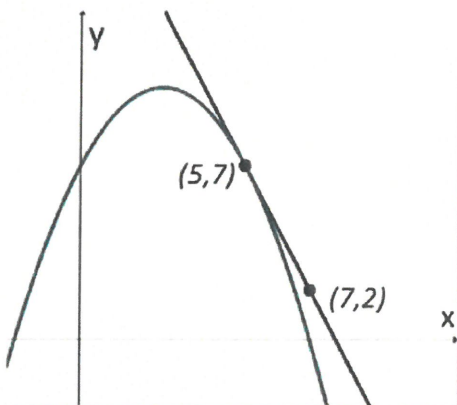
a) För att beräkna medellutningen drar vi en sekant mellan de två punkterna:



Sekantens lutning beräknas:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-10}{6-2} = \frac{-6}{4} = -1,5$$

b) För att beräkna lutningen drar vi en tangent till grafen i punkten $x = 5$



Tangentens lutning beräknas:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-7}{7-5} = \frac{-5}{2} = -2,5$$

Svar: a) Medellutningen mellan $x = 2$ och $x = 6$ är $-1,5$.
b) Lutningen vid $x = 5$ är $-2,5$.

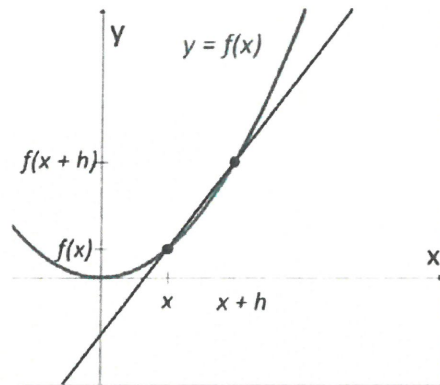
Komihåg:

- För att ta fram en sekant använder vi två punkter på funktionen.
- För att ta fram en tangent drar man en linje som har samma lutning som grafen i just den punkten. Man använder en punkt på funktion och en annan punkt från tangenten.

Derivata

Derivatans definition

Derivatans definition utgår från en sekant mellan två punkter där avståndet mellan punkterna kallas h .



När man minskar värdet på h blir avståndet mellan punkterna mindre och mindre. Om man gör h oändligt litet hamnar punkterna oändligt nära varandra, och resultat blir att man får fram lutningen i en punkt.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Med derivatans definition kan vi ta fram en funktion som beskriver lutningen i varje punkt.

Exempel: Derivera $f(x) = 2x^2 + x$ med derivatans definition.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h)^2 + x+h) - (2x^2 + x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 + x+h) - (2x^2 + x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2 + h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1$

Deriveringsregler

Vi kan ta fram en funktion som beskriver hur grafen förändras med hjälp av deriveringsreglerna.

Regler		Exempel	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$2x^3$	$6x^2$
$C \cdot a^x$	$C \cdot \ln a \cdot a^x$	$4 \cdot 1,05^x$	$4 \cdot \ln 1,05 \cdot 1,05^x$
$C \cdot e^{kx}$	$k \cdot C \cdot e^{kx}$	$20e^{-0,5x}$	$-10 \cdot e^{-0,5x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$10 \ln x$	$\frac{10}{x}$

Komihåg:

- Derivata = lutningen i en punkt = $f'(x)$
- Derivatans av en x -term = talet framför x -et.
- Derivatans av ett tal = 0
- Derivera olika termer var för sig.

Extrempunkter

Extrempunkter

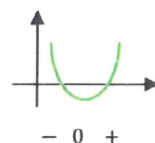
Det finns tre olika typer av extrempunkter. För alla extrempunkter gäller att derivatan är noll.

- $f'(x) = 0 \rightarrow \text{Extrempunkt}$

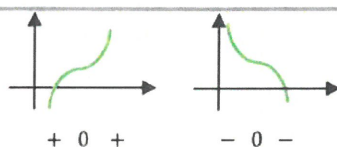
Maximipunkt



Minimipunkt



Terrasspunkt



Teckenschema

När man ska bestämma typ av extrempunkt för en funktion gör man ett teckenschema/teckenstudie.

Exempel: Bestäm extrempunkterna för funktionen $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x$ har extrempunkter samt vad för sorts extrempunkter det är.

1. Vi deriverar med deriveringsreglerna:

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 8$$

2. Vi sätter $f'(x) = 0$ och löser ekvationen:

$$0 = -x^2 + 6x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 4$$

3. Vi gör ett teckenschema för att se vad det är för typer av extrempunkter:

x	1	2	3	4	5
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

4. Vi beräknar y-värdena i punkterna.

$$f(2) = -\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \approx -6,7$$

$$f(4) = -\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \approx -5,3$$

Svar: Funktionen har en minimipunkt vid (2; -6,7) och en maximipunkt vid (4; -5,3).

Andraderivata

Andraderivatan beskriver hur derivatan förändras.

Bestämning av extrempunkter

Funktionen $f(x)$ har en extrempunkt där $f'(x) = 0$. Med andraderivatan kan bestämma vilken typ av extrempunkt det är:

- $f''(x) > 0 \rightarrow \text{minimipunkt}$
- $f''(x) < 0 \rightarrow \text{maximipunkt}$

Obs! Om $f''(x) = 0$ måste man göra ett teckenschema för att bestämma typen av extrempunkt.

Exempel: Bestäm extrempunkter till funktionen $f(x) = e^{0,5x} - 2x$ med hjälp av andraderivata.

1. Derivera

$$f'(x) = 0,5e^{0,5x} - 2$$

2. $f'(x) = 0$

$$0,5e^{0,5x} - 2 = 0$$

$$0,5e^{0,5x} = 2$$

$$e^{0,5x} = 4$$

$$0,5x = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 4}{0,5} \approx 2,8$$

3. Kontrollera typ av extrempunkt med $f''(x)$

$$f''(x) = 0,25e^{0,5x}$$

$$f''(2,8) = 0,25e^{0,5 \cdot 2,8} \approx 1 > 0 \rightarrow \text{Buktar upp}$$

$\rightarrow$ Minimipunkt

4. Ta fram y-värde

$$f(x) = e^{0,5x} - 2x$$

$$f(2,8) = e^{0,5 \cdot 2,8} - 2 \cdot 2,8 \approx -1,5$$

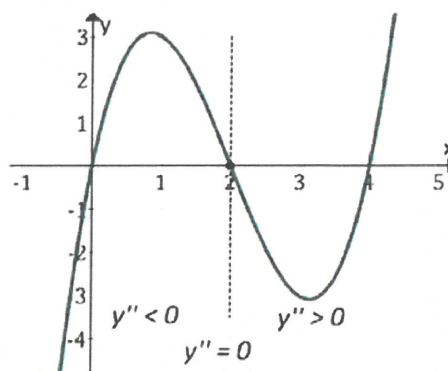
Svar: Minimipunkt vid (2,8; -1,5)

Konkavitet

En grafs konkavitet innebär hur den buktar. Förhållandet mellan en grafs konkavitet och andraderivata är:

- $f''(x) > 0 \rightarrow \text{konkav uppåt}$
- $f''(x) < 0 \rightarrow \text{konkav nedåt}$
- $f''(x) = 0 \rightarrow \text{byter konkavitet}$

Förhållandet illustreras i figuren nedan.



Den punkten där grafen byter konkavitet kallas för **inflexionspunkt**. En inflexionspunkt har kriteriet att andraderivatan är noll men att derivatan inte är noll.

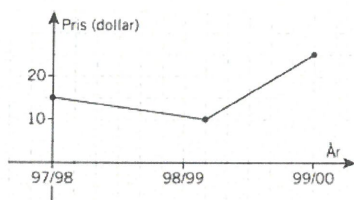
- $f''(x) = 0$ och $f'(x) \neq 0 \rightarrow \text{inflexionspunkt}$

Hemuppgifter 2

2.1 Förändringshastigheter

- 1 Bestäm Δy och Δx från punkt A till punkt B om
- A (1, 5) och B (4, 9)
 - A (-4, -6) och B (0, 6).

- 2 Diagrammet visar priset på 1 fat olja.



Bestäm den genomsnittliga prisändringen per månad för 1 fat olja

- från 1 jan 98 till 1 mars 99
- från 1 mars 99 till 1 jan 00.

- 3 Temperaturen hos Peters julsinka steg som tabellen visar:

Tid (h)	0	1	2	3	4	5
Temperatur ($^{\circ}\text{C}$)	10	14	27	44	61	75

Beräkna den genomsnittliga förändringshastigheten för temperaturen i tidsintervallet

- från 2 h till 4 h
- från 4 h till 5 h.

- 4 Ett företag som tillverkar q enheter av en vara beräknar sin vinst till p kr, där

$$p = 200q - 0,16q^2 - 25\,000.$$

- Bestäm och tolka Δp då q ökar från $q_1 = 400$ till $q_2 = 500$.

- Bestäm och tolka motsvarande ändringskvot $\frac{\Delta p}{\Delta q}$.

- 5 Rita kurvan $y = 9 - x^2$ och beräkna medellutningen i intervallet

- $-2 \leq x \leq 0$
- $1 \leq x \leq 3$.

- 6 Punkten $P(4; 0,5)$ ligger på kurvan

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- Beräkna $\frac{y(4+h) - y(4)}{h}$ för $h = 0,001$.
- Vilken lutning bär tangenten i P ha?

- 7 Vilken lutning har kurvan $y = 2x^2$ i punkten (2, 8)?

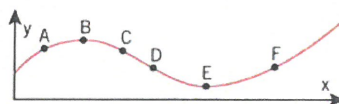
- 8 Skissa en kurva som har

- positiv lutning för $x < 0$
- lutningen 0 då $x = 0$
- negativ lutning för $x > 0$.

2.2 Derivata

- 9 I vilka punkter är $f'(x)$

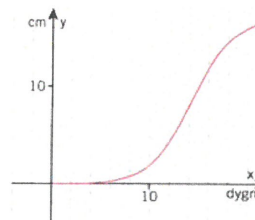
- noll
- positiv
- negativ?



- 10 Temperaturen ute en sommardag är $f(t)$ $^{\circ}\text{C}$, där t är tiden i timmar räknat från kl 08.00.

- Tolka vad $f(2) = 10$ betyder.
- Tolka vad $f'(2) = 1$ betyder.

- 11 En blomsterplantas längd y cm ökar med tiden x dygn som grafen visar.



Skissa en tangent och bestäm ett ungefärligt värde för tillväxthastigheten efter 14 dygn, d v s då $x = 14$.

- 12 Bestäm med derivatans definition $f'(2)$ om $f(x) = x^2$.

2.3 Deriveringsregler

13 Derivera

- a) $y = 5x^8 - 4x^3 + 12x + 5$
 b) $y = 5e^x + 2e^{3x} - 3e^{-4x} + 7$
 c) $y = 5\sqrt{x} + \frac{6}{x}$
 d) $y = x^8 + x^{0,4} + e^{0,2x} + 2^x$

14 Beräkna $f'(2)$ om

- a) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}$
 b) $f(x) = 9x^{-2/3} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

15 Derivera

- a) $y = 2e^x + e^{-2x}$ b) $y = 6 + 2e^{x/2}$

16 Bestäm tangentens ekvation för $y = 4 + 3 \cdot e^{-0,5x}$ där $x = 0$.

17 Lös ekvationen exakt.

- a) $e^x = 2$ b) $\ln x = 3$

18 Derivera $y = 5^x$.

19 Värdet på en tavla, y miljoner kr, ändras under några år enligt $y = 10 \cdot 1,1^x$ där x är antal år efter år 2005.

Beräkna och tolka $y'(2)$.

20 Derivera $y = 2^{3x}$ genom att skriva om med basen e .

21 En löpare ökar sin hastighet under de första sex sekunderna av ett hundrameterslopp. Då gäller att vägsträckan s m kan beräknas med funktionen

$$s(t) = 3,45 \cdot t^{1,39}, \quad 0 \leq t \leq 6$$

där t är tiden i sekunder.

- a) Hur långt hinner löparen på 5 s?
 b) När har han hunnit 20 m?
 c) För $t > 6$ är hastigheten konstant. Hur stor är den?
 d) Vilken blir tiden för detta lopp på 100 m?

22 $y = C \cdot e^{kx}$

Bestäm C och k om vi vet att

- a) $y(0) = 100$ och $y(2) = 200$
 b) $y(0) = 60$ och $y'(0) = 120$.

23 Ge exempel på ett tredjegradspolynom, vars derivata saknar nollställen.

2.4 Grafisk och numerisk derivering

24 En termometer placeras först i en bägare med varmt vatten. Därefter sätts den i en bägare med vatten av rumtemperatur. Temperaturen y °C registreras efter x s, där $x = 10, 11, 12, \dots$

Tid, x s	10	11	12	13	14
Temperatur, y °C	30,1	29,6	29,1	28,6	28,1

Bestäm den hastighet som temperaturen förändras med efter 12 s, d v s då $x = 12$.

25 Tabellen visar hur långt, s m, en bil hunnit på t s.

Tid, t s	0	1	2	3	4	5
Väg, s m	0	3	10	21	36	53

- a) Beräkna medelhastigheten i intervallet från $t = 2$ till $t = 5$.
 b) Rita ett diagram som visar vägen som funktion av tiden och använd diagrammet för att bestämma bilens hastighet då $t = 2$.

26 Bestäm ett närmevärde med en decimal till $y'(2)$ om $y = 20 + 66 \cdot 10^{-0,2x}$ genom att

- a) beräkna $\frac{y(2+h) - y(2-h)}{2h}$ för några olika värden på h
 b) använda räknarens deriveringsfunktion
 c) rita grafen och lägga in en lämplig tangent
 d) derivera $y(x)$ och beräkna $y'(2)$.

Hemuppgifter 3

3.1 Vad säger förstaderivatan om grafen?

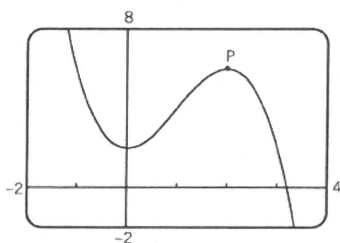
1 Lös ekvationen $f'(x) = 0$ om

a) $f(x) = 5 + 4x - x^2$

b) $f(x) = 4 + 6x^2 - 2x^3$

2 Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för maximipunkten P på kurvan

$y = 2 + 3x^2 - x^3$



3 Beskriv steg för steg hur du gör för att bestämma extrempunkterna till kurvan $y = f(x)$.

4 Bestäm med hjälp av derivata de lokala extrempunkterna på kurvan $y = x^3 - 3x$. Rita kurvan.

5 Bestäm de punkter på kurvan $y = 2x^3 - 2x$ där lutningen är lika med 4. Tolka ditt resultat grafiskt.

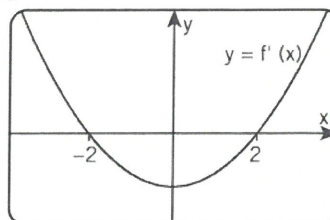
6 Undersök med derivata när funktionen $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 7$ är växande.

7 Vilket är det minsta värde som derivatan till funktionen $f(x) = x^3 - 5x + 1$ kan anta?

8 Låt $y = x^3 - 2x$.

- Vilken term dominerar för stora $|x|$?
- Vilken term dominerar för små $|x|$?
- Skissa grafen utan hjälpmedel.
- Kontrollera skissen med grafitare.

9 Derivatan till funktionen $y = f(x)$ har grafen



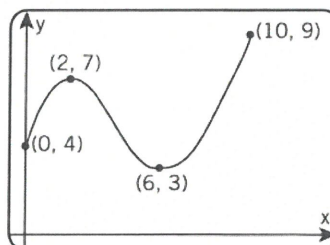
Förklara med derivatans förändring varför $x = -2$ ger $y_{\max}$ och $x = 2$ ger $y_{\min}$.

10 Låt $y = 5 + 3x - x^3$.

Skissa först grafen för hand, kontrollera sedan med räknaren och bestäm extrempunkternas koordinater med derivata.

11 En funktion $y = f(x)$ är definierad i intervallet $0 \leq x \leq 10$. Bestäm ur figuren koordinaterna för

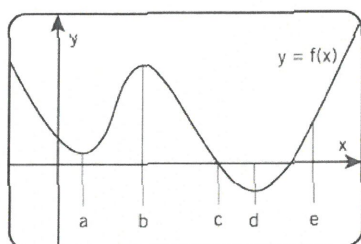
- de lokala extrempunkterna
- de globala extrempunkterna.



12 Ange största och minsta värde för $f(x) = x^2 - 2x + 4$ i intervallet $-2 \leq x \leq 3$.

13 Ange ett rimligt värde på $f(2,05)$ om vi vet att $f(2) = 4$ och $f'(2) = -0,8$.

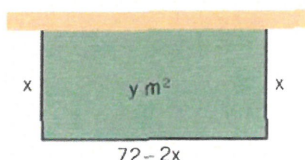
- 14 Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$.



- a) För vilka av de markerade x -värdena växlar derivatan $f'(x)$ tecken?
b) Skissa grafen $y = f'(x)$.

3.2 Derivator och tillämpningar

- 15 Figuren visar en rektangulär inhägnad med ett 72 m långt stängsel.

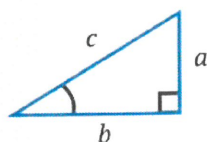


- a) Bestäm y som funktion av x .
b) Ange funktionens definitionsmängd.
c) För vilket x -värde är inhägnadens area så stor som möjligt?
- 16 En boll kastas rakt upp i luften. Höjden y m över marken beskrivs av funktionen $y = 2 + 20x - 5x^2$ där x är tiden i sekunder. Hur högt når bollen?
- 17 Bensinförbrukningen y liter/mil för en bil kan beräknas med funktionen $y = \frac{x^2}{8000} - \frac{x}{50} + 1,4$ $0 < x \leq 160$ där x km/h är hastigheten. Vilken hastighet ger den lägsta bensinförbrukningen?
- 18 För vilket värde på x har parallelltrapetsen så stor area som möjligt?
-
- 19 Antalet skadeinsekter y på en planta kan beräknas med funktionen $y = 0,01x^2 + 0,5x$, där x är tiden i dygn sedan den första insekten angrep plantan. När uppgår antalet insekter till 24 och med vilken hastighet ökar antalet då?
- 20 Derivera
- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = x^{-9}$ | c) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | d) $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$ |
- 21 Lös ekvationen $y' = 0$ om
- | | |
|------------------------------|----------------------|
| a) $y = x^2 + \frac{250}{x}$ | b) $y = e^{3x} - 9x$ |
|------------------------------|----------------------|
- 22 En öppen papplåda med kvadratisk basyta har formen av ett rätblock och rymmer 500 cm^3 .
- a) Visa att höjden $h = \frac{500}{x^2}$ om basen är x cm.
b) Ställ upp en funktion som beskriver hur lådans area beror av x och bestäm vilka mått som ger den minsta arean.
- 23 15 g av ett radioaktivt ämne sönderfaller. Mängden y g som återstår efter x år avtar exponentiellt enligt $y = C \cdot e^{-kx}$. Efter ett år återstår 10 g.
- a) Bestäm konstanterna C och k .
b) Beräkna och tolka $y'(4)$.
- 24 Undersök grafiskt $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$ och $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$.
- a) Hur många lösningar har $f(x) = g(x)$?
b) För vilka x är $g'(x) = 0$?
- 25 Bestäm grafiskt hur många lokala extrempunkter kurvan $y = 30x^4 - x^2 + 2$ har.

*Trigonometri

Det finns tre trigonometriska samband man jobbar med:

- $\sin v = \frac{a}{c}$
- $\cos v = \frac{b}{c}$
- $\tan v = \frac{a}{b}$



När man jobbar med trigonometri räknar man antingen ut **en sträcka** eller **en vinkel**.

Räkna ut en sträcka

Exempel: Bestäm sidan x .

Vi utgår från den kända vinkeln. Kateten med längden 10 cm blir då **närliggande katet** och x representerar **hypotenusan**. Vi kan då använda $\cos$.

$$\cos 28 = \frac{10}{x}$$

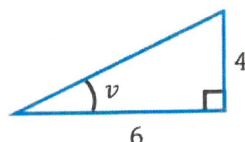
$$x = \frac{10}{\cos 28}$$

Svar: $x \approx 11 \text{ cm}$

Räkna ut en vinkel

Exempel: Bestäm vinkel v .

Från figuren kan man ställa upp följande samband: $\tan v = \frac{4}{6}$



Vinkeln beräknas genom att ta **inversen** av den trigonometriska funktionen.

$$v = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)$$

Svar: $v \approx 33,7^\circ$

*Vektorer

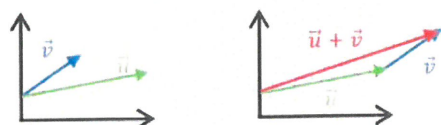
En vektor är en storhet som har både **storlek** och **riktning**.

Koordinatform: $\vec{v} = (x_v, y_v)$ **Vektorns längd:** $|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$

Vid addition och subtraktion av vektorer lägger man ihop deras x-komponenter för sig och deras y-komponenter för sig.

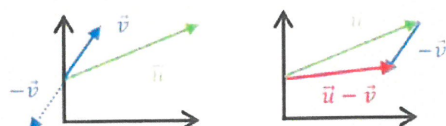
Addition

Vid addition av vektorer lägger man ihop deras x-komponenter respektive deras y-komponenter.



$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v)$$

Subtraktion



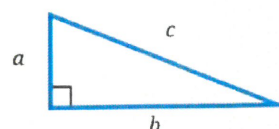
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_u, y_u) - (x_v, y_v) = (x_u - x_v, y_u - y_v)$$

Multiplikation med skalär

$$k \cdot \vec{v} = k(x_v, y_v) = (kx_v, ky_v)$$

Geometri

Pythagoras sats



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Obs! Gäller endast för rätvinkliga trianglar!

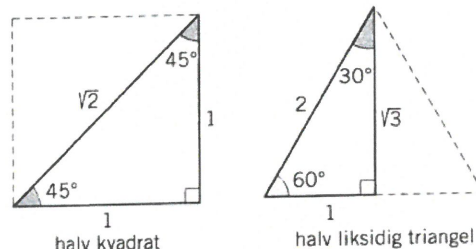
Likformighet

Likformighet innebär att förhållandet mellan två figurers sidor är samma. Det enklaste sättet att ta reda på om två trianglar är likformiga är att kontrollera vinklarna. Om man säkerställer att två vinklar är identiska så är trianglarna likformiga.



$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{c}{f}$$

Två speciella trianglar



Med hjälp av figurerna kan vi t ex bestämma

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Cirkels ekvation

En cirkel har ekvationen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ där (a, b) är koordinaterna för medelpunkten och r är radien.

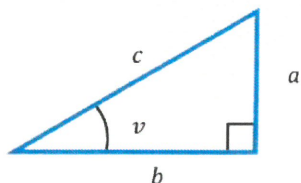
Trigonometri

Trigonometri

Definitioner

För en rätvinklig triangel gäller följande:

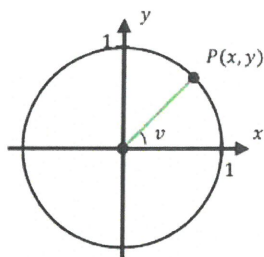
- $\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{a}{c}$
- $\cos v = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c}$
- $\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} = \frac{a}{b}$



Enhetscirkeln

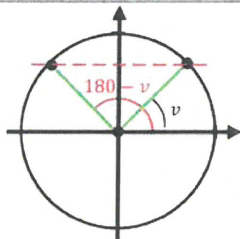
I enhetscirkeln kan en punkts koordinater uttryckas med sinus och cosinus.

- $\cos v = x$
- $\sin v = y$
- $\tan v = \frac{y}{x} = \frac{\sin v}{\cos v}$

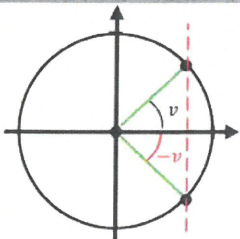


Samband

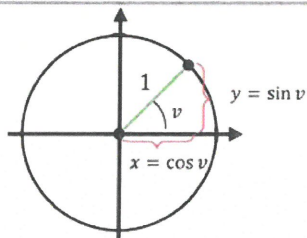
$$\begin{cases} \sin(180^\circ - v) = \sin v \\ \cos(180^\circ - v) = -\cos v \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin(-v) = -\sin v \\ \cos(-v) = \cos v \end{cases}$$



$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

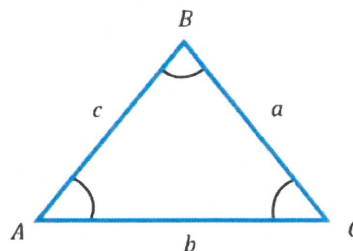


Pythagoras sats: $x^2 + y^2 = 1$

Triangelsatser

Formler

- Areasatsen: $T = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$
- Sinussatsen: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- Cosinussatsen: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos C$



Två lösningar

Sinussatsen & Triangelsatsen

När man arbetar med sinus så måste man alltid räkna med att det **kan finnas** två lösningar, då man kan få **två olika vinklar**. Detta eftersom $\sin v = \sin(180^\circ - v)$.

Det finns **inte** två lösningar om:

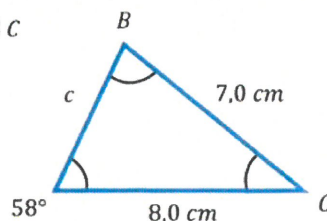
- Vinkelsumman $> 180^\circ$
- Alla sidor är kända

Cosinussatsen

När man arbetar med $\cos$ finns det ingen möjlighet att man får fram två olika vinklar. Däremot kan det när man använder *cosinussatsen* bli en andragradsekvation med två rötter. Detta innebär att det i så fall finns två möjliga trianglar.

Exempel

Beräkna vinkel C



Vi kan här inte räkna ut vinkel C direkt, utan får börja med att räkna ut vinkel B.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{8,0 \cdot \sin 58^\circ}{7,0}$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{8,0 \cdot \sin 58^\circ}{7,0}\right) = 75,7^\circ$$

$$B_1 = 75,7^\circ \quad B_2 = 180^\circ - 75,7^\circ = 104,3^\circ$$

$$C = 180^\circ - A - B$$

$$C_1 = 180^\circ - 58^\circ - 75,7^\circ = 46,3^\circ$$

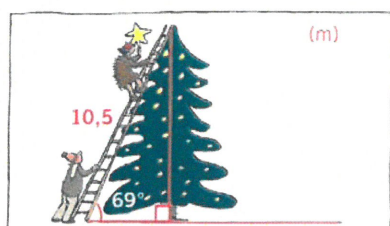
$$C_2 = 180^\circ - 58^\circ - 104,3^\circ = 17,7^\circ$$

Svar: Vinkel C kan vara $46,3^\circ$ eller $17,7^\circ$.

Diagnos 5

Från rätvinkliga till godtyckliga trianglar

1 Hur hög är granen?



2 I triangeln ABC är vinkeln A rät. Rita figur och bestäm med en decimal triangelns minsta vinkel då

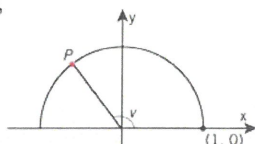
- a) $AB = 41,5$ cm och $AC = 73,1$ cm
- b) $AB = 37,9$ cm och $BC = 92,3$ cm
- c) $AC = 54,2$ cm och $BC = 83,6$ cm

3 För vilka vinklar x i hela grader i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ är

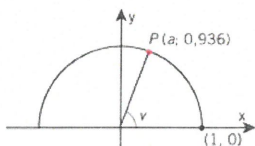
- a) $\sin x = 0,65$ c) $\sin x = -0,56$
- b) $\cos x = 0,72$ d) $\cos x = -0,35$

4 Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om punkten P har koordinaterna

- a) $(-0,6; 0,8)$
- b) $(-0,5376; 0,8432)$



5 Beräkna vinkeln v och x -koordinaten a för punkten P i figuren.

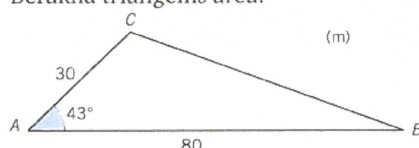


6 Bestäm med enhetscirkeln de vinklar x i intervallet $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ för vilka

- a) $\sin x = 0$ c) $\cos x = 0$
- b) $\sin x = -1$ d) $\cos x = 1$

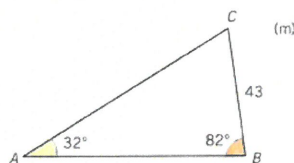
Triangelsatserna

7 Beräkna triangelns area.



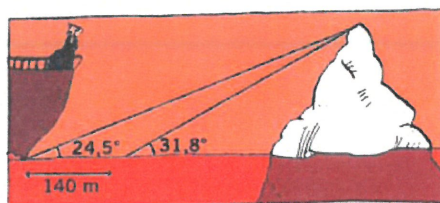
8 I triangeln ABC har AB längden 25 cm och AC 18 cm. Triangelns area är 175 cm^2 . Beräkna vinkeln A .

9 Hur långa är sidorna AC och AB i triangeln ABC ?



10 Beräkna den största vinkeln i en triangel med sidorna 9 m, 10 m och 15 m. Svara i hela grader.

11 Från ett fartyg syns toppen av ett isberg under vinkeln $24,5^\circ$. Efter att fartyget kommit 140 m närmare syns samma topp under vinkeln $31,8^\circ$. Bestäm isbergets höjd över havet.



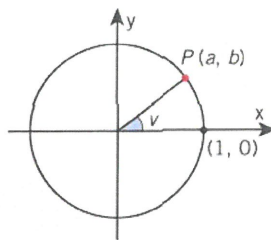
12 I triangeln ABC är sidan $AB = 18$ cm, sidan $AC = 12$ cm och vinkeln $B = 30^\circ$. Beräkna längden av BC med

- a) cosinussatsen b) sinussatsen.

Blandade övningar kapitel 5

Del I  Utan räknare

- 1 Punkten P i en enhetscirkel har koordinaterna (a, b) .



Uttryck med hjälp av punkten P 's koordinater

- a) $\sin v$ b) $\cos v$ c) $\tan v$

- 2 Ekvationen $\sin x = 0,47$ har en lösning $x \approx 28^\circ$ enligt räknaren.

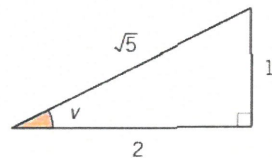
Har ekvationen någon mer lösning mellan 0° och 180° ? Motivera ditt svar.

- 3 Ekvationen $\cos x = 0,47$ har en lösning $x \approx 62^\circ$ enligt räknaren.

Har ekvationen någon mer lösning mellan 0° och 180° ? Motivera ditt svar.

- 4 En cirkel med radien 3 och medelpunkten i $(1, 2)$ har ekvationen $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
Undersök om punkten $(3, 0)$ ligger på cirkeln.

5



Bestäm med hjälp av figuren

- a) $\sin v$ c) $\sin(90^\circ - v)$
b) $\cos v$ d) $\cos(180^\circ - v)$

- 6 Ordna följande tal i storleksordning:

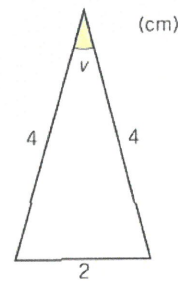
b $a = \sin 24^\circ$, $b = \cos 100^\circ$ och $c = \sin 165^\circ$.

Motivera ditt svar.

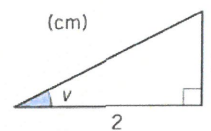
- 7 I triangeln ABC är vinkeln $A = 90^\circ$.

Visa att $\sin B = \cos C$.

- 8 Visa att $\cos v = \frac{7}{8}$



9
c



För vinkeln v i figuren gäller att

$$\frac{\sin v + \cos v}{\sin v \cdot \cos v} = k \cdot \sqrt{5}$$

Bestäm talet k .

- 10 Fyrhörningen $ABCD$ har sidorna

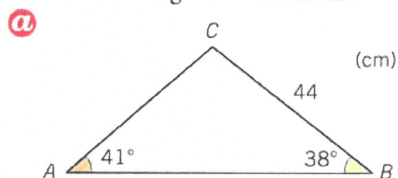
$AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 4$ cm och $DA = 3$ cm.

a) Visa att $\cos A = \frac{1 + 16 \cos C}{15}$

- b) Bestäm $\cos A$ exakt, om fyrhörningen är inskriven i en cirkel.

Del II Med räknare

11 Beräkna längden av sidan AB .



12 Hur stor är den största vinkeln i en triangel med sidorna 6,5 cm, 7,2 cm och 9,8 cm?

13 I triangeln ABC är vinkeln $B = 30^\circ$,
b sidan $AB = 18$ cm och sidan $AC = 12$ cm.
Beräkna längden av sidan BC .



En solig och vindstilla vinterdag är Helen och Lotta ute och åker långfärdsskridskor. Klockan 12.00 kommer de fram till Kappelskär. De vet att det tar 35 minuter att åka från Kappelskär till Sundskär och att det tar 60 minuter att åka från Kappelskär direkt till Furusund. Bussen från Furusund går kl. 14.30.

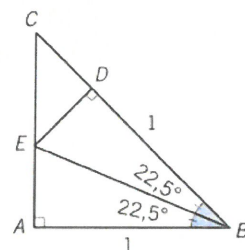
Vinkeln mellan siktlinjerna mot Sundskär och mot Furusund uppskattas till 105° . De bestämmer sig för att åka till Sundskär och fika och sedan åka raka vägen från Sundskär till Furusund. Hur lång fikapaus kan de ta och ändå hinna med bussen som går 14.30?

Vi förutsätter att Helen och Lotta färdas med konstant fart. (NP)

15 I en triangel med arean 88 m^2 är en vinkel 75° och en annan 65° .

Ⓒ Beräkna triangelns längsta sida.

16 Bestäm $\tan 22,5^\circ$ med hjälp av figuren. Svara exakt.



Utredande uppgifter **a** **b** **c**

Den här typen av uppgifter brukar bedömas efter följande kriterier:

- vilka matematiska kunskaper du har visat
- hur väl du har förklarat ditt arbete och motiverat dina slutsatser
- hur väl du har redovisat ditt arbete och genomfört dina beräkningar.

- 17 a) Beräkna $(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2$
b) Beräkna $(\sin 127^\circ)^2 + (\cos 127^\circ)^2$
c) Välj en vinkel v mellan 0° och 180° och beräkna $(\sin v)^2 + (\cos v)^2$
d) Vad upptäcker du?
e) Bevisa din upptäckt.

18 I en parallelogram är två sidor 24 cm och 15 cm.

- a) Beräkna parallelogrammens area om den mellanliggande vinkeln är 130° .
b) Antag att den mellanliggande vinkeln varierar mellan 30° och 150° . Mellan vilka värden varierar då parallelogrammens area?
c) En parallelogram har två sidor a och b och en mellanliggande vinkel v . Bestäm en formel för parallelogrammens area.

Facit:

Diagnos 1.5

1. a) $10x + 4$ b) $x = -0,4$
2. $y = 3x + 5$
3. $f(x)$ är funktionsvärdet då $x = 10$. "x då $f(x) = 10$ " är x-värdet då funktionens värde är 10.
4. $y = 2x + 5$
 $k = 2$ betyder att linjens lutning är 2, dvs att för varje steg i x-led ökar y med 2.
 $m = 5$ betyder att linjen går genom punkten (0, 5)
5. T ex punkten (6, 4)
6. $k = -3$
7. $y = 3x + 11$
8. a) $y = 5 - \frac{x}{2}$ b) $y = 3x - 2$
9. $y = 1,5x$
10. Nej, den ligger inte på linjen.
11. a) Ljuset var 25 cm från början. b) $k = -4,5$ Ljusets längd minskar med 4,5 cm/h när det brinner. c) Ca 5,6 timmer.
12. $a = -1$
13. a) $x \approx -0,67$ $y \approx 4,67$ b) $x \approx 0,71$ $y \approx -1,57$
14. a) $\begin{cases} x = 1,6 \\ y = 0,5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2,4 \\ y = -7,6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases}$
15. 45 stora lådor och 52 små lådor

Diagnos 1.6

1. a) $2x^2 - x - 3$ b) $4x^2 - 9$ c) $x^2 - 8x + 16$ d) $9x^2 + 24x + 16$
2. a) $3x^2 + 2x - 2$ b) $36x$
3. a) $2x(x + 3)$ b) $3x(3x - 1)$
4. a) $(x + 2)(x - 2)$ b) $(a + b)^2$
5. a) $x = \pm 4$ b) $x_1 = 4$ $x_2 = -3$
6. a) $x_1 = 8$ $x_2 = 2$ b) $x_1 = 1$ $x_2 = -9$
7. a) $x = 7$
8. a) T ex $x^2 = -4$ b) $x_1 = 2i$ $x_2 = -2i$
9. a) Funktionens största värde är 4. b) $x_1 = 1$ $x_2 = 5$ c) $x = 3$
10. Maximipunkt
11. a) $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ b) Saknar nollställan
12. Symmetrilinje $x = 3$ Minsta värde: 1
13. a) 6 m b) 25 m
14. a) $x = 140^{1/6} \approx 2,28$ b) $x = \frac{\lg 140}{\lg 6} \approx 2,76$
15. a) $\lg 100 = 2$ b) $\lg 0,1 = -1$
16. 10 år (9,6 år)

Diagnos 2

1. a) $6ab - 9b^2$ b) $6xh + 3h^2$
2. a) $5a^{-6}$ b) $x^2 - 3$
3. a) 6 b) 11
4. a) $x_1 = -3$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$ b) $x_1 = 0$ $x_2 = 1/3$
5. a) $p(x) = (x - 6)(x - 10)$ b) $p(x) = -10(x - 2)(x - 3)$
6. a) $G(-3) = -2/3$ b) $x = 0$ och $x = -2$
7. a) 7 b) $2(x - 3)$ c) $\frac{3x}{4}$ d) 0
8. a) $x = 64$ b) $x = 5$ c) $x = -3$ d) $x = 8$
9. a) $3b^2$ b) $\frac{a^2}{12}$ c) $\frac{a}{1 - 2a}$ d) $\frac{a - 1}{2}$
10. a) $y = 4x + 4$ b) $y = -2x + 10$ c) $y = 3x - 2$
11. a) $x = 2$ b) minimipunkt c) $(2, -32)$ d) $(-2, 0)$ och $(6, 0)$ e) $(0, -24)$
12. a) $x = 6^{1/5} \approx 1,431$ b) $x = \frac{\lg 6}{\lg 5} \approx 1,113$
13. Potensfunktion t ex $f(x) = 3 \cdot x^{0,5}$ Exponentialfunktion t ex $f(x) = 2 \cdot 1,5^x$

Hemuppgifter 1

- | | | |
|--|--|---|
| 1 a) $-a^2 - 2ah - h^2 = -(a + h)^2$
b) $12x - 75$
c) $2x^3 - 4x + 5$ | 15 a) $2(x - 3)$ b) 0 | 33 a) 2 b) 0 |
| 2 a) $4x^2(1 - 4x)$
b) $(x + 8)(x - 8)$
c) $2(z + 7)(z - 7)$
d) $x(x - 1)^2$ | 16 a) $x = 64$ b) $x = 5$ | 34 a) $x = \lg 8$ b) $x = 1000$ |
| 3 a) $\frac{3h - y}{2}$ b) $\frac{2ah}{4b}$ | 17 a) $x = -3$ ($x = 1$ duger inte)
b) $x = 8$ ($x = -4$ duger inte) | 35 $10^{\lg 4}$ |
| 4 a) ± 13
b) $x_1 = 2, x_2 = -4$
c) $x_1 = 0, x_2 = 3$
d) $x_1 = 2, x_2 = 10$ | 18 a) $\frac{a}{1 - 2a}$
b) $\frac{a - 1}{2}$ | 36 a) $x = 9$ c) $x = 15$
b) $x = 239$ |
| 5 a) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$
b) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{5}$ | 19 14 | 37 a) $x = \frac{\lg 17}{\lg 6} \approx 1,581$
b) $x = \frac{\lg 1,5}{\lg 5} \approx 0,251$
c) $x = \frac{0,5 \cdot \lg(6,8/2,5)}{\lg 3} = 0,455$
d) 1 |
| 6 a) $(x + 2)(x - 12) = 0$
b) $x^2 + 1 = 0$ | 20 $-4h - h^2$ | 38 a) $y = 4 \cdot 1,5^x$ b) $y = 25 \cdot 0,8^x$ |
| 7 a) $x_1 = 4, x_2 = 16$
b) $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 3$ | 21 a) $k = -2$ b) $k = 0$ | 39 98 mg (97,7) |
| 8 a) $x = 7$ ($x = 2$ duger inte)
b) $x = 5$ ($x = -3$ duger inte) | 22 a) $y = 4x + 4$
b) $y = -2x + 10$
c) $y = 3x - 2$ | 40 År 2013. |
| 9 a) $p(x) = (x - 6)(x - 10)$
b) $p(x) = -10(x - 2)(x - 3)$ | 23 $x_1 = x_2 = -3$
c) $x = -3$ och $(-3, 0)$ | 41 För 8730 år sedan. |
| 10 $y = 0,8(x - 1)(x - 5)$ | 24 a) $x = 0$ och $x \approx 2,66$ (2,6598...)
b) $0 < x < 2,66$ | |
| 11 $a = 7, b = -4$ | 25 a) a^3 c) $64x^{15}$
b) a^{19} d) $6x^2$ | |
| 12 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{y}{5}$ | 26 a) $5^{-2x} + 5^{2x}$ | |
| 13 a) 7 b) $\frac{1}{x - 4}$ | 27 a) $8 \cdot 3^x$ b) $3^x(3^x - 3)$ | |
| 14 a) $\frac{9x}{12} = \frac{3x}{4}$ b) $\frac{18a}{15} = \frac{6a}{5}$ | 28 a) 5 c) $\frac{1}{3}$
b) 0,9 d) 8 | |
| | 29 a) $8^{1/10} \approx 1,231$
b) $\left(\frac{7,32}{5,2}\right)^{1/9} \approx 1,039$ | |
| | 30 21,8 % per år | |
| | 31 30,7 % per år | |
| | 32 a) 907 poäng b) 1 min 54,8 s | |

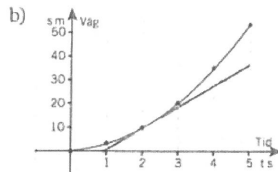
Hemuppgifter 2

- 1 a) $\Delta x = 3$, $\Delta y = 4$
b) $\Delta x = 4$, $\Delta y = 12$
- 2 a) Sjunker med 0,36 dollar/mån
($-\frac{5}{14}$).
b) Ökar med 1,5 dollar/mån
($\frac{15}{10}$).
- 3 a) Stiger med 17°C/h .
b) Stiger med 14°C/h .
- 4 a) 5600 kr. Vinstökningen då produktionen ökar från 400 till 500 enheter.
b) 56 kr.
Vinsten ökar med 56 kr/enhet.
- 5 a) 2
b) -4
- 6 a) -0,0625
b) -0,0625
- 7 8
- 8 Tex grafen till $y = -x^2$.
- 9 a) B, E
b) A, F
c) C, D
- 10 a) Klockan tio var det 10°C .
b) Klockan tio steg temperaturen med 1°C/h .
- 11 2,0 cm/dygn
- 12 4
- 13 a) $y' = 40x^7 - 12x^2 + 12$
b) $y' = 5e^x + 6e^{3x} + 12e^{-4x}$
c) $y' = \frac{5x^{-1/2}}{2} - 6x^{-2} =$
$$= \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^2}$$

d) $y' = 8x^7 + 0,4x^{-0,6} + 0,2e^{0,2x} + 2^x \ln 2$
- 14 a) $1,547$
 $f'(x) = x^{-1/2} + \frac{4}{3} \cdot x^{-2/3} =$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

d) $-1,183$
 $f'(x) = -\frac{6}{x^{5/3}} + \frac{2}{x^{3/2}}$
- 15 a) $y' = 2e^x - 2e^{-2x}$
b) $y' = e^{x/2}$
- 16 $y = -1,5x + 7$

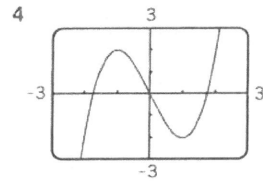
- 17 a) $x = \ln 2$
b) $x = e^3$
- 18 $y' = 5^x \ln 5$
- 19 $y'(2) \approx 1,15$, d v s värdet på
tavlan ökade år 2007 med hastig-
heten 1,15 miljoner kr/år.
- 20 $y' = 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2$
 $y = 2^{3x} = e^{3x \ln 2}$
- 21 a) 32,3 m
b) Efter 3,54 s
c) 9,65 m/s
 $v(6) = s'(6) =$
 $= 1,39 \cdot 3,45 \cdot 6^{0,39}$
d) 12,1 s
 $6 + \frac{100 - f(6)}{f'(6)}$
- 22 a) $C = 100$, $k = \frac{\ln 2}{2}$
b) $C = 60$, $k = 2$
- 23 Tex $y = x^3 + x$
- 24 Sjunker med $0,5^\circ \text{C/s}$.
- 25 a) $14,3 \text{ m/s}$ $\frac{43}{3}$
- b)
-
- Cirka $7,4 \text{ m/s}$ (Tangentens
lutning, svaret varierar med
hur tangenten dragits och
avläsning gjorts.)
- 26 a) -12,1
b) -12,1
c) Rita tangenten i den punkt där
 $x = 2$.
d) $y'(2) \approx -12,1$,
 $y'(x) = -13,2 \cdot \ln 10 \cdot 10^{-0,2x}$



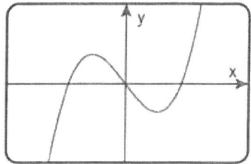
Cirka 7,4 m/s (Tangentens lutning, svaret varierar med hur tangenten dragits och avläsning gjorts.)

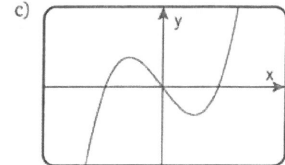
Hemuppgifter 3

- 1 a) $x = 2$ b) $x_1 = 0, x_2 = 2$
- 2 $P(2, 6)$
- 3 • Derivera.
 - Bestäm x -värden som ger att $y' = 0$.
 - Gör teckentabell, bestäm typ av extrempunkter och beräkna y för de x -värden då $y' = 0$.
 - (Om funktionen är definierad på ett intervall, bestäm även funktionsvärdena i intervallgränserna.)

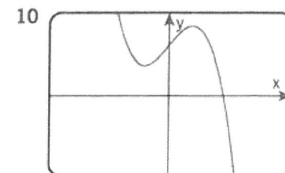


Maximipunkt: $(-1, 2)$
Minimipunkt: $(1, -2)$

- 5 $(-1, 0)$ och $(1, 0)$.
I de punkter där grafen skär x -axeln har kurvans tangent lutningen 4.
- 6 $1 < x < 2$
 $y' = 0$ för $x = 1$ och $x = 2$.
 $y' > 0$ för $1 < x < 2$.
- 7 -5
 $f(x) = 3x^2 - 5$, som antar sitt minsta värde -5 för $x = 0$.
- 8 a) $y \approx x^3$
b) $y \approx -2x$
c) 
- 9 f' har teckenväxlingen
 $+0-$ för $x = -2$.
 f' har teckenväxlingen
 $-0+$ för $x = 2$.



- 9 f' har teckenväxlingen
+ 0 - för $x = -2$.
 f' har teckenväxlingen
- 0 + för $x = 2$.



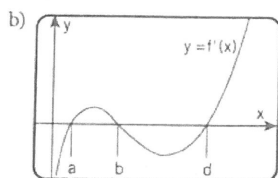
Maximipunkt: $(1, 7)$
 Minimipunkt: $(-1, 3)$

- 11 a) Maximipunkter:
(2, 7) och (10, 9).
Minimipunkter:
(0, 4) och (6, 3).
b) Global maximipunkt: (10, 9).
Global minimipunkt: (6, 3).
- 12 Största värde = 12
Minsta värde = 3

13 3,96

$$f(2,05) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0,05$$

14 a) a, b och d.



15 a) $y = 72x - 2x^2$

b) $0 < x < 36$

c) $x = 18$

16 22 m

När bollen vänder är $y' = 0$.

17 80 km/h

18 $x = 5$

$$\begin{aligned} \text{Arean } A &= \frac{(3x + x)(10 - x)}{2} = \\ &= 2x - 2x^2, \quad 0 < x < 10, \\ x = 5 \text{ ger } A_{\max} &= 50 \end{aligned}$$

19 Efter 30 dygn är antalet 24.

De ökar då med hastigheten

1,1 insekter/dygn.

Lös $0,01x^2 + 0,5x = 24$ och beräkna y' för erhållet x -värde.

20 a) $f'(x) = -9 \cdot x^{-10}$

$$b) f'(x) = -\frac{3}{x^4}$$

$$c) f'(x) = 4 - \frac{2}{x^3}$$

$$d) f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

21 a) $x = 5$

$$b) x = \frac{\ln 3}{3} \approx 0,366$$

22 a) $V = x^2 \cdot h = 500$ ger

$$h = \frac{500}{x^2}$$

$$\begin{aligned} b) A &= x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{500}{x^2} = \\ &= x^2 + \frac{2000}{x} \end{aligned}$$

Max då $x = 10$,

d v s $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$.

23 a) $y = 15e^{-0,405x}$

$C = 15$ och

$$k = -\ln \frac{2}{3} \approx 0,405$$

b) $y'(4) \approx -1,2$

Efter 4 år avtar mängden med hastigheten 1,2 g/år.

24 a) 2 st

b) $x = -2$ och $x = 2$.

25 3 st ($x = -0,1291$; 0 ; $0,1291$)

Zooma in nära kring skärningen med y -axeln.

Diagnos 5

1 9,8 m

2 a) $29,6^\circ$ b) $24,2^\circ$ c) $40,4^\circ$

3 a) 41° , 139° c) Ingen lösning

b) 44° d) 110°

4 a) $\sin v = 0,8$

$$\cos v = -0,6$$

b) $\sin v = 0,8432$

$$\cos v = -0,5376$$

5 $v = 69,4^\circ$ a) $0,352$

6 a) 0° , 180° c) 90°

b) Ingen lösning d) 0°

7 820 m^2 (818,398...)

8 51° eller 129°

Ledtråd:

Areasatsen ger

$$\frac{25 \cdot 18 \cdot \sin A}{2} = 175.$$

Obs! Två möjliga lösningar.

9 $AC \approx 80 \text{ m}$ $AB \approx 74 \text{ m}$

10 104°

Ledtråd:

Använd cosinussatsen. Största vinkeln står mot största sidan.

11 240 m (240,771...)

12 a) b)

$BC = 23,5 \text{ cm}$ eller $BC = 7,7 \text{ cm}$

Blandade övningar kapitel 5

1 a) $\sin v = b$

b) $\cos v = a$

c) $\tan v = b/a$

2 Ekvationen har även lösningen $x \approx 152^\circ$.

Motivering:

$$\sin x = \sin(180^\circ - x)$$

3 Ekvationen har ingen mer lösning i intervallet.

Motivering:

I enhetscirkeln motsvaras $\cos v$ av x -koordinaten för punkt P då radien OP har vridits v grader. Det finns bara en vinkel i intervallet där $x = 0,47$ i punkt P .

4 Nej, punkten ligger inte på cirkeln den ligger innanför cirkeln.

Motivering:

Då $x = 3$ och $y = 0$ sätts in i cirkelns ekvation får vänsterledet värdet 8.

$$5 \text{ a) } \sin v = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b) \cos v = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$c) \sin(90^\circ - v) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d) \cos(180^\circ - v) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

6 $\cos 100^\circ$, $\sin 165^\circ$, $\sin 24^\circ$

Motivering:

I enhetscirkeln ligger vinkeln 100° i 2:a kvadranten och där är $\cos v < 0$.

$$\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 165^\circ) = \sin 15^\circ$$

I intervallet $0^\circ < v < 90^\circ$ är $\sin v > 0$, och $\sin v$ ökar då v ökar.

7 Den motstående kateten till vinkeln B är närliggande katet till vinkeln C .

$$\sin B = b/a \text{ och } \cos C = b/a$$

8 Använd t ex cosinussatsen.

$$9 k = \frac{3}{2} = 1,5$$

10 a) Ledtråd:

Använd cosinussatsen på $\triangle ABD$ och på $\triangle BCD$ och sätt de två uttrycken på $(BD)^2$ lika.

$$b) \cos A = 1/31$$

11 $AB = 66 \text{ cm}$

12 Största vinkeln är 91° .

13 $BC = 7,7 \text{ cm}$ eller $BC = 24 \text{ cm}$ (23,5).

14 38 minuter

15 17 m

$$16 \tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$$

17 a) - d): Summan blir alltid 1

e) Bevisa med hjälp av enhetscirkeln.

18 a) 280 cm^2 (275,7...)

Ledtråd:

En diagonal delar parallelogrammen i två kongruenta trianglar.

b) Mellan 180 cm^2 och 360 cm^2

Ledtråd:

Använd areasatsen på en av trianglarna. Värdet på $\sin v$ varierar mellan 0,5 och 1. ($\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = 0,5$ och $\sin 90^\circ = 1$).

$$c) \text{Arean} = ab \sin v$$