Tentamen: Lösningsförslag

Torsdag 18 augusti 2016 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \geq x^4, \\ 1, & y \leq 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm följande gränsvärden eller visa att det givna gränsvärdet inte existerar:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

Lösning: Punkten $(0,1)$ ligger i det inre av området $y \leq x^4$. Speciellt är $f(x,y) = 1$ i en omgivning av $(0,1)$. Det följer att $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 1$.
Svar: 1.

(b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$

Lösning: Punkten $(2,3)$ ligger i det inre av området där $f = 0$ eftersom $3 < 2^4$ och $3 > 0$. Speciellt är $f(x,y) = 0$ i en omgivning av $(2,3)$. Det följer att $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0$.
Svar: 0.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Lösning: Punkten $(0,0)$ ligger där områdena med $f = 0$ och $f = 1$ möts, vilket innebär att gränsvärdet inte existerar. Vi kan bevisa detta tex som följer: För restriktionen av f till x-axeln har vi

$$f(x,0) = 1 \to 1 \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Å andra sidan, för restriktionen av f till kurvan $y = x^4/2$ har vi (eftersom $0 < x^4/2 < x^4$)

$$f\left(x, \frac{x^4}{2}\right) = 0 \to 0 \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Eftersom dessa två gränsvärden är olika så följer att f saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.
Svar: Gränsvärdet existerar inte.

2. (4 poäng) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(\pi, 1, 4\pi)$ till ytan $z = f(x,y)$ där $f(x,y) = 4xy^2 + \sin x$.

Lösning: Vi har $f'_x(x,y) = 4y^2 + \cos x$ och $f'_y(x,y) = 8xy$, så för $(x,y) = (\pi, 1)$ finner vi

$$f(\pi,1) = 4\pi, \qquad f'_x(\pi,1) = 4 + \cos\pi = 3, \qquad f'_y(\pi,1) = 8\pi.$$

Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Sätter vi in $(a, b) = (\pi, 1)$ ger detta

$$z = 4\pi + 3(x - \pi) + 8\pi(y - 1),$$

eller förenklat $z = 3x + 8\pi y - 7\pi$.
Svar: $z = 3x + 8\pi y - 7\pi$.

3. (4 poäng) Låt

$$a = a(t), \qquad b = b(t), \qquad c = c(t),$$

beteckna längden, bredden och höjden av en rektangulär box vars dimensioner beror av tiden t. Vid en given tidpunkt gäller att $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 3$ m, $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 1$ m/s och $\frac{dc}{dt} = -3$ m/s.

(a) Med vilken takt förändras boxens volym vid den givna tidpunkten?

Lösning: Låt $V = abc$ vara boxens volym. Kedjeregeln ger

$$\frac{dV}{dt} = \frac{da}{dt}bc + a\frac{db}{dt}c + ab\frac{dc}{dt}.$$

Sätter vi en de givna värdena finner vi att vid den givna tidpunkten gäller

$$\frac{dV}{dt} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-3) = 3 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Svar: 3 m^3/s.

(b) Låt $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ vara längden av en av boxens inre diagonaler. Ökar eller minskar D vid den givna tidpunkten?

Lösning: Kedjeregeln ger

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{D}\left(a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right).$$

Vid den givna tidpunkten ger detta

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 + 9}}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3)) = -\frac{6}{\sqrt{14}} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Då värdet är negativt betyder det att D minskar.
Svar: D minskar vid den givna tidpunkten.

4. (4 poäng) Bland alla punkterna på grafen till funktionen $z = 10 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $x + 2y + 3z = 0$, bestäm den punkt som ligger på störst avstånd från planet.

Lösning: Den del av grafen som ligger ovanför planet består av punkterna

$$\{(x, y, 10 - x^2 - y^2) \,|\, (x, y) \in D\}$$

där D är ellipsskivan

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 10 - x^2 - y^2 \geq -\frac{x+2y}{3} \right\}.$$

Eftersom $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$ är en enhetsnormal till planet följer att avståndet $d(\mathbf{x})$ från en punkt $\mathbf{x} = (x,y,z)$ till planet är

$$d(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{14}}(x + 2y + 3z).$$

Vi vill således maximera funktionen

$$f(x,y) := d(x,y,10 - x^2 - y^2) = \frac{1}{\sqrt{14}}(x + 2y + 30 - 3x^2 - 3y^2)$$

över området D. På randen ∂D av D är $f = 0$. Alltså antar f sitt maxvärde i en kritisk punkt i det inre av D. Då

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1 - 6x, 2 - 6y)$$

följer att den enda kritiska punkten är $(x,y) = (1/6, 1/3)$. Punkten på grafen som ligger ovanför $(1/6, 1/3)$ har z-koordinat

$$z = 10 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 10 - \frac{5}{36} = \frac{355}{36}.$$

Alltså är

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$$

den sökta punkten.
Svar: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$.

5. (4 poäng) Låt $u(x,y,z)$ vara en lösning till Laplaceekvationen $\Delta u = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Om $u(x,y,z) = f(r)$ där $f(r)$ bara beror på avståndet $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ till origo, så uppfyller $f(r)$ en ordinär differentialekvation. Bestäm denna ekvation.

Lösning: Detta är Exempel 10 på s. 201 i Persson & Böiers. Om vi betraktar $r = r(x,y,z)$ som en funktion av (x,y,z) så ger kedjeregeln

$$u'_x = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},$$

där vi har använt att $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Ytterligare en derivering ger

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= f''(r)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} \\ &= f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x^2}{r^3} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - x^2}{r^3}. \end{aligned}$$

På samma sätt fås

$$u''_{yy} = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - y^2}{r^3}, \qquad u''_{zz} = f''(r)\frac{z^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Addition av ovanstående uttryck ger

$$\Delta u = f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + f'(r)\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3} = f''(r) + f'(r)\frac{2}{r}.$$

Alltså uppfyller $f(r)$ den ordinära differentialekvationen $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$.
Svar: $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$

(b) Bestäm den allmänna radiella (dvs som bara beror av avståndet r till origo) lösningen till Laplaceekvationen i tre dimensioner genom att lösa ekvationen för $f(r)$.

Lösning: Låter vi $g(r) = f'(r)$ kan ekvationen $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$ skrivas

$$\frac{dg}{dr} + \frac{2}{r}g = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{dg}{g} = -\frac{2dr}{r}.$$

Integration ger

$$\ln g = -2\ln r + A \quad \text{dvs} \quad g(r) = \frac{B}{r^2},$$

där A, B är konstanter. Ytterligare en integration ger

$$f(r) = \frac{C}{r} + D,$$

där C, D är konstanter, dvs den allmänna radiella lösningen är

$$u(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D.$$

Svar: $\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D$, där C och D är konstanter.

6. (4 poäng) Beräkna

$$\iint_D e^{-2x-3y}\,dxdy$$

där D är området $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x+3y \leq 6$.

Lösning: Detta är uppgift 6.11 i övningsboken. Området D kan uttryckas som

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \frac{6-2x}{3}\right\},$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-2x-3y}\,dxdy &= \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} e^{-2x-3y}\,dydx = \int_0^3 \left[\frac{e^{-2x-3y}}{-3}\right]_{y=0}^{\frac{6-2x}{3}} dx \\ &= \int_0^3 \frac{e^{-2x-(6-2x)} - e^{-2x}}{-3}\,dx = \int_0^3 \left(-\frac{e^{-6}}{3} + \frac{e^{-2x}}{3}\right)dx \\ &= -e^{-6} + \left[\frac{e^{-2x}}{-6}\right]_0^3 = -e^{-6} - \frac{e^{-6}}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1-7e^{-6}}{6}.\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1-7e^{-6}}{6}$.

7. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2, xz, y^2)$ genom ytan

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + y + z = 2,\ x^2 + y^2 \le 1\},$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

Lösning: Ytan Y består av den del av planet $3x + y + z = 2$ som ligger ovanför enhetsdisken $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 1\}$ och har parameterframställningen

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2 - 3x - y), \qquad (x, y) \in D.$$

Vi har

$$\mathbf{r}'_x = (1, 0, -3), \qquad \mathbf{r}'_y = (0, 1, -1), \qquad \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (3, 1, 1).$$

Vektorn $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y$ har positiv z-koordinat. Alltså ges flödet av

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dx dy \\ &= \iint_D (y^2, x(2 - 3x - y), y^2) \cdot (3, 1, 1) dx dy \\ &= \iint_D (4y^2 + 2x - 3x^2 - xy) dx dy.\end{aligned}$$

Vi byter till polära koordinater vilket ger

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2 \sin^2 \varphi + 2r \cos \varphi - 3r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \cos \varphi \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi \right) \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 (4\pi - 3\pi) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

där vi har använt identiteterna

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0$$

och

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi.$$

Svar: $\frac{\pi}{4}$.

8. (4 poäng) Låt Y vara den sfäriska kalotten

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad z \ge 1.$$

(a) Ge en parameterframställning av Y.

Lösning: Detta är uppgift 8.16 i övningsboken. Vi använder sfäriska koordinater som ges av

$$(x, y, z) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta).$$

För den givna kalotten har vi $R = 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$, där θ_{max} bestäms av $2\cos\theta_{max} = 1$, dvs $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}$.
Svar: $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

(b) Bestäm en normalvektor till Y.

Lösning: Y är en del av en sfär så $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är en normalvektor till Y.

(c) Beräkna arean av Y.

Lösning: Areaelementet på en sfär ges i sfäriska koordinater av (se s. 307 i Persson & Böiers)

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Alltså finner vi

$$\begin{aligned}\text{Area}(Y) &= \iint_Y dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta d\theta \\ &= 8\pi[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\pi\Big(-\frac{1}{2}+1\Big) = 4\pi.\end{aligned}$$

Svar: Arean av Y är 4π.

(d) Beräkna arean av

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z \geq h, \qquad 0 \leq h \leq R.$$

Lösning: Ytan har parametriseringen

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq \arccos(h/R), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

så vi erhåller

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(h/R)} R^2\sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\arccos(h/R)} \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi R^2[-\cos\theta]_0^{\arccos(h/R)} = 2\pi R^2\Big(-\frac{h}{R}+1\Big) = 2\pi R(R-h).\end{aligned}$$

Svar: Arean är $2\pi R(R-h)$.

9. (4 poäng) Låt $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ vara sfären med radie 1 centrerad i punkten $(0, 0, 1)$. Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara den kropp som begränsas uppåt av konen $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ och nedåt av Σ. Bestäm volymen av K.

Lösning: Låt (r, φ, z) där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ vara cylindriska koordinater. Sfären Σ består av de punkter (x, y, z) som uppfyller

$$r^2 + (z-1)^2 = 1 \quad \text{dvs} \quad z = 1 \pm \sqrt{1-r^2}$$

där plustecknet svarar mot övre och minustecknet mot nedre halvan av sfären. Konen $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \frac{r}{2}$ skär den nedre halvsfären. Alltså skär sfären och konen varandra då

$$\frac{r}{2} = 1 - \sqrt{1-r^2} \quad \text{dvs} \quad r = 0 \text{ eller } r = \frac{4}{5}.$$

Det följer att projektionen av K på xy-planet är disken $0 < r < \frac{4}{5}$. Uppåt avgränsas K av $z = \frac{r}{2}$ och nedåt av $z = 1 - \sqrt{1-r^2}$. Detta ger

$$\begin{aligned}
\text{Volym}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{4}{5}} \left(\frac{r}{2} - (1 - \sqrt{1-r^2})\right) r dr d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{4}{5}} \left(\frac{r^2}{2} - r + r\sqrt{1-r^2}\right) dr \\
&= 2\pi \left[\frac{r^3}{6} - \frac{r^2}{2} - \frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\right]_{r=0}^{\frac{4}{5}} \\
&= 2\pi \left(\frac{(\frac{4}{5})^3}{6} - \frac{(\frac{4}{5})^2}{2} - \frac{(1-(\frac{4}{5})^2)^{3/2}}{3} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{4\pi}{75}.
\end{aligned}$$

Svar: Volymen av K är $\frac{4\pi}{75}$.

10. (4 poäng) Bestäm de båda punkterna på ellipsen $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 45$ som ligger närmast origo.

Lösning: Vi vill minimera $f(x, y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$, där

$$g(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 45.$$

Eftersom

$$\nabla f = (2x, 2y), \qquad \nabla g = (10x + 4y, 4x + 16y),$$

kan Lagranges ekvation $\nabla f = \lambda \nabla g$ skrivas

$$\begin{cases} 2x = \lambda(10x + 4y), \\ 2y = \lambda(4x + 16y). \end{cases}$$

Genom att eliminera λ ser vi att

$$\frac{2x}{10x + 4y} = \frac{2y}{4x + 16y} \quad \text{dvs} \quad x(2x + 8y) = y(5x + 2y).$$

Förenkling ger

$$x^2 + \frac{3}{2}xy - y^2 = 0.$$

Alltså är $y = 2x$ eller $y = -\frac{x}{2}$. Vi sätter in dessa båda lösningar i bivillkoret $g(x, y) = 0$. I fallet $y = 2x$ ger bivillkoret att

$$5x^2 + 4x(2x) + 8(2x)^2 = 45 \quad \text{dvs} \quad x^2 = 1.$$

Alltså finner vi de två möjliga extrempunkterna $(x, y) = (1, 2)$ och $(x, y) = (-1, -2)$. Båda dessa punkter ligger avståndet $\sqrt{5}$ från origo. I fallet $y = -\frac{x}{2}$ ger bivillkoret att

$$5x^2 + 4x\left(-\frac{x}{2}\right) + 8\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = 45 \quad \text{dvs} \quad x^2 = 9.$$

Alltså finner vi de två möjliga extrempunkterna $(x, y) = (3, -\frac{3}{2})$ och $(x, y) = (-3, \frac{3}{2})$. Men båda dessa punkter ligger avståndet $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ från origo, alltså ligger de

längre från origo än punkterna $(1,2)$ och $(-1,-2)$.
Svar: Punkterna $(x,y)=(1,2)$ och $(x,y)=(-1,-2)$ ligger närmast origo.

Alternativ lösning: I de roterade variablerna $u=2x-y$ och $v=x+2y$ så har ellipsen ekvationen

$$4u^2+9v^2=15^2.$$

Detta är en ellips med den långa halvaxeln längs u-axeln och korta halvaxeln längs v-axeln. Om $u=0$, så är $(3v)^2=15^2$, dvs $v=\pm 5$. Alltså ligger punkterna $(u,v)=(0,\pm 5)$ närmast origo. I xy-systemet har dessa punkter koordinaterna $(x,y)=(1,2)$ och $(x,y)=(-1,-2)$