Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 18 augusti 2016

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt D vara det område ovanför x-axeln i xy-planet som begränsas av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ samt linjerna $y = -x$ och $y = \sqrt{3}x$. Beräkna x-koordinaten av masscentrum för D som ges av
$$\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy}.$$
(4 p)

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_C xy\,dx - y^2\,dy$$
där kurvan C är den medurs orienterade triangeln med hörnpunkter i $(0,0)$, $(3,0)$ och $(0,4)$.
(4 p)

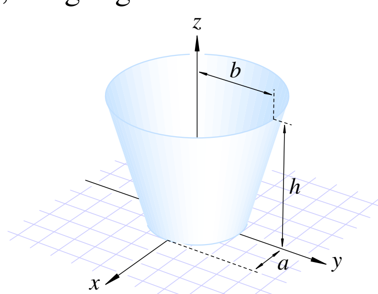
3. Låt $f(x,y) = e^{x-y} - x + y + xy$.
   (a) Visa att origo är en kritisk punkt till funktionen f. **(2 p)**
   (b) Är origo ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller ingetdera till funktionen f?
   (2 p)

DEL B

4. Låt $f(x, y) = xg(x+2y)$ där g är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion. Visa att
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
(4 p)

5. En kurva i planet parametriseras av
$$\mathbf{r}(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t),$$
där $t \geq 0$.
(a) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ och farten $|\mathbf{r}'(t)|$ för $t \geq 0$. **(2 p)**
(b) Beräkna kurvans båglängd från punkten $\mathbf{r}(0)$ till punkten $\mathbf{r}(2)$. **(2 p)**

6. En fylld vattentank har formen av en rak stympad cirkulär kon med undre radie a, övre radie b, där $b > a$, och höjd h, enligt figuren.



Den koniska delen S av tanken kan parametriseras genom
$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{b-a}{h}s + a\right)\cos t \\ y = \left(\dfrac{b-a}{h}s + a\right)\sin t \\ z = s \end{cases}$$
där $0 \leq s \leq h$, $0 \leq t < 2\pi$. Kraften som vattnet utövar på ytan S har z-komponent som ges av flödet av vektorfältet
$$\mathbf{P}(x, y, z) = \rho g(h-z)(0, 0, 1) = (0, 0, \rho g(h-z))$$
ut genom ytan S, där ρ är vattnets densitet och g är tyngdaccelerationen. Beräkna denna kraftkomponent genom att beräkna flödesintegralen. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Visa att om x, y och z uppfyller att $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $x + 2y + 3z \leq 3$ så måste $xyz \leq 1/6$. **(4 p)**

8. En kropp K i rummet ligger mellan planen $z = 0$ och $z = 1$. Dessutom vet vi att tvärsnittet av planet $z = a$ och kroppen utgör en cirkelskiva med radie a^2 för varje a i intervallet $0 \leq a \leq 1$.
   (a) Skissera två olika sådana kroppar K. **(1 p)**
   (b) Vet vi tillräckligt för att kunna bestämma volymen av K? I så fall, beräkna volymen, annars förklara vad som saknas. **(3 p)**

9. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2, y + 1, z - 1)$$
och låt C_P vara en orienterad slät kurva som börjar i origo och slutar i punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$. Bestäm den punkt P som ligger längst från origo och som uppfyller
$$\int_{C_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 9.$$
(4 p)