KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2016-08-18

DEL A

1. Låt D vara det område ovanför x-axeln i xy-planet som begränsas av cirkeln $x^2+y^2=1$ samt linjerna $y=-x$ och $y=\sqrt{3}x$. Beräkna x-koordinaten av masscentrum för D som ges av
$$\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy}.$$
(4 p)

Lösningsförslag. I polära koordinater beskrivs området av $0\le r\le 1$ och $\pi/3\le\theta\le 3\pi/4$.

Vi beräknar täljaren som
$$\iint_D x\,dxdy=\int_0^1\int_{\pi/3}^{3\pi/4} r^2\cos\theta d\theta=\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1[\sin\theta]_{\pi/3}^{3\pi/4}=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$
och vi får nämnaren som
$$\iint_D dxdy=\int_0^1\int_{\pi/3}^{3\pi/4} r\theta d\theta=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1[\theta]_{\pi/3}^{3\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{24}.$$
Därmed ges x-koordinaten av masscentrum för D av
$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{24}{5\pi}=\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5\pi}.$$

Svar. x-koordinaten för masscentrum för D är $\dfrac{4(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5\pi}$.

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_C xy\,dx - y^2\,dy$$
där kurvan C är den medurs orienterade triangeln med hörnpunkter i $(0,0)$, $(3,0)$ och $(0,4)$.
(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan använda en parametrisering av kurvan i tre delar och får då $\mathbf{r}_1(t) = (0,4t)$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}_2(t) = (3t, 4(1-t))$, $0 \le t \le 1$ och $\mathbf{r}_3(t) = (3(1-t), 0)$, $0 \le t \le 1$. Genom detta blir kurvintegralen
$$\int_0^1 (0,-16t^2)\cdot(0,4)\,dt + \int_0^1 (12t(1-t), -16(1-t)^2)\cdot(3,-4)\,dt + \int_0^1 (0,0)\cdot(-3,0)\,dt$$
$$= \int_0^1 -64t^2 + 36t(1-t) + 64(1-t)^2\,dt$$
$$= \int_0^1 36t - 36t^2\,dt = \left[\frac{36t^2}{2} - \frac{36t^3}{3}\right]_0^1 = 18 - 12 = 6.$$

Vi kan också använda Greens formel som ger oss kurvintegralen som en dubbelintegral över området D som begränsas av triangeln C. Eftersom kurvan är negativt orienterad får vi
$$\int_C xy\,dx - y^2\,dy = \iint_D (x-0)\,dxdy = \int_0^3 \int_0^{4-4x/3} x\,dydx = \int_0^3 [xy]_0^{4-4x/3}\,dx$$
$$= \int_0^3 \frac{4}{3}x(3-x)\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 18 - 12 = 6.$$

Svar. $\int_C xy\,dx - y^2\,dy = 6$

3. Låt $f(x, y) = e^{x-y} - x + y + xy$.
   (a) Visa att origo är en kritisk punkt till funktionen f. **(2 p)**
   (b) Är origo ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller ingetdera till funktionen f? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) För att kontrollera att det är en kritisk punkt beräknar vi gradienten som är $\mathbf{grad}\, f(x, y) = (e^{x-y}-1+y, -e^{x-y}+1+x)$ och $\mathbf{grad}\, f(0, 0) = (e^{0-0}-1+0, -e^{0-0}+1+0) = (0, 0)$. Alltså är origo en kritisk punkt.

(b) Vi beräknar Taylorpolynomet av ordning två kring origo genom att också beräkna andraderivatorna. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{x-y} + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-y}$$

vilket i origo ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = e^{0-0} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -e^{0-0} + 1 = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = e^{0-0} = 1.$$

Alltså ges Taylorpolynomet av

$$p(x, y) = 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

vilket visar att origo är ett lokalt minimum eftersom $p(x, y) > 1$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$.

Vi kan också använda Taylorpolynomet i en variabel för e^t som är $1 + t + t^2/2$ för att snabbare komma till

$$p(x, y) = 1 + (x - y) + \frac{(x - y)^2}{2} - x + y + xy = 1 + \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Svar.

(b) Origo är ett lokalt minimum.

DEL B

4. Låt $f(x,y) = xg(x+2y)$ där g är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion. Visa att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar de partiella derivatorna med hjälp av kedjeregeln och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x+2y) + xg'(x+2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xg'(x+2y)$$

samt andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g'(x+2y) + g'(x+2y) + xg''(x+2y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2g'(x+2y) + 2xg''(x+2y)$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4xg''(x+2y).$$

Vi sätter nu in dessa i uttrycket

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= (2g'(x+2y) + xg''(x+2y)) - (2g'(x+2y) + 2xg''(x+2y)) + \frac{1}{4} \cdot 4xg''(x+2y) = 0,\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

5. En kurva i planet parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t),$$

där $t \geq 0$.

(a) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ och farten $|\mathbf{r}'(t)|$ för $t \geq 0$. **(2 p)**

(b) Beräkna kurvans båglängd från punkten $\mathbf{r}(0)$ till punkten $\mathbf{r}(2)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi deriverar för att få hastigheten

$$\mathbf{r}'(t) = (2t \cos t - t^2 \sin t, 2t \sin t + t^2 \cos t)$$

och farten ges av beloppet av detta. Vi får

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)|^2 &= t^2(4\cos^2 t - 4t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t) \\ &\quad + t^2(4\sin^2 t + 4t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t) \\ &= 4t^2 + t^4 = t^2(t^2 + 4) \end{aligned}$$

där vi har använt trigonometriska ettan $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Därmed är $|\mathbf{r}'(t)| = t\sqrt{t^2 + 4}$ i och med att $t \geq 0$.

(b) Kurvans båglängd ges av integralen av $|\mathbf{r}'(t)|$ över intervallet, alltså av

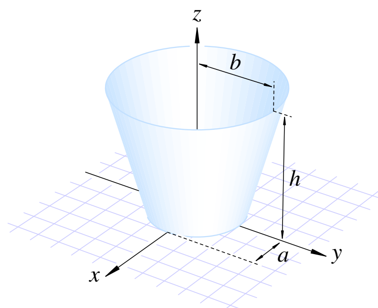
$$\begin{aligned} \int_0^2 |\mathbf{r}'(t)|\, dt &= \int_0^2 t\sqrt{4 + t^2}\, dt = \left[\frac{1}{3}(4 + t^2)^{3/2}\right]_0^2 \\ &= \frac{8^{3/2}}{3} - \frac{4^{3/2}}{3} = \frac{16\sqrt{2} - 8}{3} = \frac{8(2\sqrt{2} - 1)}{3}. \end{aligned}$$

Svar.

(a) Hastigheten är $\mathbf{r}'(t) = (2t \cos t - t^2 \sin t, 2t \sin t + t^2 \cos t)$ och farten är $|\mathbf{r}'(t)| = t\sqrt{t^2 + 4}$.

(b) Båglängden är $\dfrac{8(2\sqrt{2} - 1)}{3}$

6. En fylld vattentank har formen av en rak stympad cirkulär kon med undre radie a, övre radie b, där $b > a$, och höjd h, enligt figuren.



Den koniska delen S av tanken kan parametriseras genom

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{b-a}{h}s + a\right)\cos t \\ y = \left(\dfrac{b-a}{h}s + a\right)\sin t \\ z = s \end{cases}$$

där $0 \le s \le h$, $0 \le t < 2\pi$. Kraften som vattnet utövar på ytan S har z-komponent som ges av flödet av vektorfältet

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \rho g(h - z)(0, 0, 1) = (0, 0, \rho g(h - z))$$

ut genom ytan S, där ρ är vattnets densitet och g är tyngdaccelerationen. Beräkna denna kraftkomponent genom att beräkna flödesintegralen. **(4 p)**

Lösningsförslag. Om vi tillsluter ytan är förutsättningarna för att använda divergenssatsen uppfyllda. Vi gör det genom att lägga till cirkelskivor vid $z = 0$ och $z = h$. Divergensen av vektorfältet är $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = -\rho g$, vilket gör att integralen av divergensen över den stympade konen blir $-\rho g V$, där V är volymen V. Vi kan beräkna V som

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{(b-a)z/h+a} r\,dr d\theta dz = \int_0^h 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{(b-a)z/h+a} dz \\ &= \int_0^h \pi \left(\frac{(b-a)z}{h} + a\right)^2 dz = \left[\frac{\pi h}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)z}{h} + a\right)^3\right]_0^h \\ &= \frac{\pi h}{3(b-a)}\left(b^3 - a^3\right) = \frac{\pi h(b^2 + ab + a^2)}{3} \end{aligned}$$

Vi behöver nu dra bort flödet genom cirkelskivorna som vi lagt till. Vid den övre cirkelskivan är fältet noll och vid den nedre cirkelskivan har vi kraften $(0, 0, \rho g h)$ och normalvektor $(0, 0, -1)$, vilket gör att flödet blir $-\rho g h$ gången cirkelns area som är πa^2. Slutligen får vi kraften som

$$-\frac{\pi \rho g h(b^2 + ab + a^2)}{3} + \pi \rho g h a^2 = -\frac{\pi \rho g h(b^2 + ab - 2a^2)}{3} = -\frac{\pi \rho g h(b - a)(b + 2a)}{3}$$

Svar. Den sökta kraftkomponenten är $-\frac{\pi\rho g h(b-a)(b+2a)}{3}$.

DEL C

7. Visa att om x, y och z uppfyller att $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $x + 2y + 3z \leq 3$ så måste $xyz \leq 1/6$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Ett sätt att visa olikheten är genom att använda Lagranges metod för att finna maximum för funktionen $f(x, y, z) = xyz$ under de givna bivillkoren. Gradienten är (yz, xz, xy) som är noll bara på koordinataxlarna där också funktionens värde är noll. Dessa punkter kan inte vara kandidater för maximum i och med att funktionen antar positiva värden i området. Observera att funktionen f är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}^3$ och att området som beskrivs av olikheterna är kompakt. Det betyder att det måste finnas ett maximum för funktionen och att detta maximum antingen är en inre kritisk punkt eller en punkt som ligger på randen.

Vi ser därför på randen. Den består av fyra triangelformatde delar, varav tre ligger i koordinatplanen där funktionens värde är noll. De enda återstående kandidaterna är punkter i planet $x + 2y + 3z = 3$ och vi använder där Lagranges metod som säger att gradienten till f ska vara parallell med gradienten till bivillkoret, $(1, 2, 3)$ i en lokal extrempunkt.

Vi får ekvationssystemet $yz = \lambda$, $xz = 2\lambda$ och $xy = 3\lambda$. Eftersom $\lambda = 0$ åter ger funktionsvärde noll kan vi anta att $\lambda \neq 0$ och vi får då $x = 2y$, $3z = x$. När vi sätter in det i bivillkoret får vi $x + x + x = 3$, dvs $x = 1$, vilket ger $y = 1/2$ och $z = 1/3$. Detta är den enda återstående kandidaten för en maxpunkt för den kontinuerliga funktionen $f(x, y, z)$ på det kompakta området som ges av olikheterna.

Därmed har vi visat att $xyz \leq 1 \cdot (1/2) \cdot (1/3) = 1/6$ i hela området som ges av olikheterna.

8. En kropp K i rummet ligger mellan planen $z = 0$ och $z = 1$. Dessutom vet vi att tvärsnittet av planet $z = a$ och kroppen utgör en cirkelskiva med radie a^2 för varje a i intervallet $0 \leq a \leq 1$.
   (a) Skissera två olika sådana kroppar K. **(1 p)**
   (b) Vet vi tillräckligt för att kunna bestämma volymen av K? I så fall, beräkna volymen, annars förklara vad som saknas. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi kan få olika sådana kroppar genom att placera cirklarnas centrum längs olika kurvor, exempelvis längs z-axeln, eller längs linjen $(t^2, 0, t)$, där $0 \leq t \leq 1$, så att z-axeln tangerar kroppen.

(b) Förutsatt att vi med kropp menar något som är tillräckligt reguljärt för att kunna beräkna en volym med en integral har vi tillräcklig information. Ett tillräckligt villkor för sådan regularitet är att kurvan som ges av cirklarnas centra är kontinuerlig.
Vi kan nu beräkna volymen för K genom upprepad integration där vi börjar att integrera i x- och y-led och i sista steget integrerar i z-led. Då kommer resultatet av de två första integrationerna ge

$$\int_0^1 \pi(z^2)^2\, dz = \pi \cdot \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Svar.

(b) Volymen är $\pi/5$ volymsenhet.

9. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2, y + 1, z - 1)$$

och låt C_P vara en orienterad slät kurva som börjar i origo och slutar i punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$. Bestäm den punkt P som ligger längst från origo och som uppfyller

$$\int_{C_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 9.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vektorfältet är konservativt med en potential som ges av

$$\Phi(x, y, z) = \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{2}$$

vilket gör att integralen från origo till (x_0, y_0, z_0) blir

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) - \Phi(0, 0, 0) = \frac{(x_0-2)^2}{2} + \frac{(y_0+1)^2}{2} + \frac{(z_0-1)^2}{2} - 3.$$

Villkoret på integralens värde blir därmed

$$\frac{(x_0-2)^2}{2} + \frac{(y_0+1)^2}{2} + \frac{(z_0-1)^2}{2} = 12$$

och vi söker den punkt som ligger längst från origo och som uppfyller detta villkor. Enligt Lagranges metod behöver vi ha att gradienterna för målfunktionen $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ ska vara parallell med gradienten för bivillkoret i denna punkt. Detta ger $(2x_0, 2y_0, 2z_0) = \lambda(x_0 - 2, y_0 + 1, z_0 - 1)$ vilket vi kan skriva som

$$(x_0, y_0, z_0) = (2\mu, -\mu, \mu)$$

där $\mu = \lambda/(\lambda - 2)$. När vi sätter in detta i bivillkoret får vi

$$\frac{(2\mu-2)^2}{2} + \frac{(-\mu+1)^2}{2} + \frac{(\mu-1)^2}{2} = 12$$

dvs

$$3(\mu - 1)^2 = 12 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = 1 \pm 2.$$

Alltså får vi de två lösningarna $(x_0, y_0, z_0) = (6, -3, 3)$ och $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, -1)$, varav den första ligger längst från origo.

Svar. $P = (6, -3, 3)$ är den punkt som ligger längst från origo och uppfyller villkoret.