**Institutionen för matematik**

# SF1669 Matematisk och numerisk analys II
## Tentamen
## Torsdagen den 18 augusti 2016

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | – | – | – | – |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

1. Låt $D$ vara det område ovanför $x$-axeln i $xy$-planet som begränsas av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ samt linjerna $y = -x$ och $y = \sqrt{3}x$. Beräkna $x$-koordinaten av masscentrum för $D$ som ges av

$$\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D \,dxdy}.$$

**(4 p)**

2. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C xy\,dx - y^2\,dy$$

där kurvan $C$ är den medurs orienterade triangeln med hörnpunkter i $(0, 0)$, $(3, 0)$ och $(0, 4)$.
**(4 p)**

3. Låt $f(x, y) = e^{x-y} - x + y + xy$.
   (a) Visa att origo är en kritisk punkt till funktionen $f$. **(2 p)**
   (b) Är origo ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller ingetdera till funktionen $f$?
   **(2 p)**

## Del B

4. Låt $f(x,y) = xg(x+2y)$ där $g$ är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion. Visa att
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
**(4 p)**

5. En kurva i planet parametriseras av
$$\mathbf{r}(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t),$$
där $t \geq 0$.
(a) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ och farten $|\mathbf{r}'(t)|$ för $t \geq 0$. **(2 p)**
(b) Beräkna kurvans båglängd från punkten $\mathbf{r}(0)$ till punkten $\mathbf{r}(2)$. **(2 p)**

6. Betrakta integralen
$$P = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^1 \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2\sigma^2}\right) dxdy,$$
som ger sannolikheten att två oberoende normalfördelade slumpvariabler med varians $\sigma^2$ ligger i området $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.
(a) Skriv en Matlab-funktion som approximerar $P$ med trapetsregeln i två dimensioner när $\sigma = 0{,}5$. Funktionen ska ta antal punkter $M$ i $x$-led och antal punkter $N$ i $y$-led som input. **(3 p)**
(b) Vi vill nu beräkna $P$ med ett fel mindre än toleransen $\tau = 10^{-6}$. Skriv ett Matlab-program som gör detta genom att anropa funktionen i deluppgift (a) flera gånger. **(1 p)**

Observera att i dessa uppgifter ska inte Matlabs inbyggda funktioner för integration användas.

*Var god vänd!*

## DEL C

7. Visa att om $x$, $y$ och $z$ uppfyller att $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $x + 2y + 3z \leq 3$ så måste $xyz \leq 1/6$. **(4 p)**

8. Låt $\mathbf{v}_j = (x_j, y_j)$, där $j = 1, 2, \ldots, n$, vara $n$ vektorer i $\mathbb{R}^2$ vars komponenter är osäkra, alla med samma absoluta felgräns $E$. Summan av vektorerna uppskattas till $(4, 3)$, dvs

$$x_j = \tilde{x}_j \pm E, \qquad y_j = \tilde{y}_j \pm E, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_j = (\tilde{x}_j, \tilde{y}_j), \qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{v}}_j = (4, 3).$$

Uppskatta osäkerheten i vektorsummans euklidiska längd $L$,

$$L = ||\mathbf{V}||, \qquad \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j,$$

som funktion av $n$ och $E$. **(4 p)**

9. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2, y + 1, z - 1)$$

och låt $C_P$ vara en orienterad slät kurva som börjar i origo och slutar i punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$. Bestäm den punkt $P$ som ligger längst från origo och som uppfyller

$$\int_{C_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 9.$$

**(4 p)**