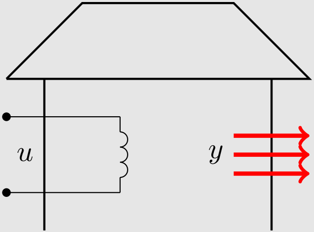
Föreläsning 1
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

29 augusti, 2016

Example (Temperaturreglering)

Hur reglerar vi temperaturen i ett hus?



$$v \begin{cases} y & = \text{temp. i huset} \\ u & = \text{tillförd effekt} \\ v & = \text{temp. utomhus} \\ r & = \text{önskad temp.} \end{cases}$$

Modell:

Betrakta en värmebalans:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \text{tillförd effekt - bortförd effekt}$$

Introduktion

Example (Temperaturreglering, fort.)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\,y(t) = \beta\big(u(t) - \alpha[y(t) - v(t)]\,\big)$$

Förenkla genom att ta $\beta = 1$ (skalning).

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = u(t) + \alpha v(t)$$

Kursen handlar om reglering (styrning) av

Dynamiska System = Differentialekvationer!

Dessa hanteras i första delen av kursen med hjälp av

Laplacetransform

Laplacetransformen

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

Regler:

i. $\mathcal{L}\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t)\} = sY(s) - y(0)$

ii. $\mathcal{L}\{\,\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\} = \frac{1}{s}Y(s)$

iii. Faltning: $\mathcal{L}\{\,\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\} = G(s)U(s)$

iv. Slutvärdessatsen: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$,
om $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existerar.

Koppling till differentialekvationer

Example

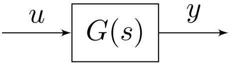
$$\begin{cases} \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\dot{u} + b_1 u \\ y(0) = \dot{y}(0) = u(0) = 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) + a_1 sY(s) + a_2Y(s) = b_0 sU(s) + b_1U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{\text{Överföringsfunktion, } G(s)} U(s)$$

Koppling till differentialekvationer

Överföringsfunktionen är sambandet mellan insignal och utsignal.



$$\Longleftrightarrow$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Observera: Initialvärden $= 0$

Poler

Definition

Systemets *poler* ges av rötterna till nämnarpolynomet hos överföringsfunktionen.

Example

$s^2 + a_1 s + a_2 = 0$

Example (Inverterad pendel)

Har poler vid $s = \pm\sqrt{g/l}$.

Poler

Example

Karaktäristisk ekvation: $s^2 + a_1 s + a_2$

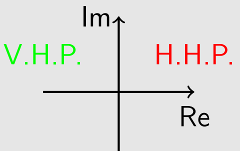
Rötter: λ_1, λ_2

$\Rightarrow$ Homogen lösning: $y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

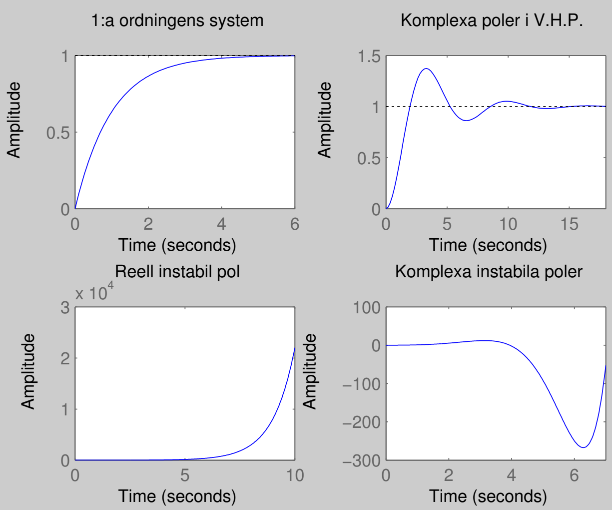
Låt nu $\lambda = x + i\omega$, där x är realdelen och ω imaginärdelen.

$$\Rightarrow e^{\lambda t} = e^{xt}\left[cos(\omega t) + isin(\omega t)\right] \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0, & \text{Re}[\lambda] < 0, \text{ Vänster HalvPlan , } \textit{Stabilt} \\ \infty, & \text{Re}[\lambda] > 0, \text{ Höger HalvPlan , } \textit{Instabilt} \end{cases}$$



Typsystem



1:a ordningens system
Amplitude
Time (seconds)
Komplexa poler i V.H.P.
Amplitude
Time (seconds)
Reell instabil pol
x 10^4
Amplitude
Time (seconds)
Komplexa instabila poler
Amplitude
Time (seconds)

Poler

Example

Bestäm utsignalen hos systemet:

$$\dot{y} + y = 20,\ y(0) = 0$$

Lösning:

$$\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{20}{s}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = 20\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{s+1} = 20\Big[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\Big]$$

$$\Longrightarrow y(t) = 20\big[1 - e^{-t}\big] \to 20, \quad t \to \infty$$

Pol i -1 i V.H.P., dvs stabilt

Nollställen

Definition

Systemets *nollställen* ges av rötterna till täljarpolynomet hos överföringsfunktionen.

Example

$b_0 s + b_1 = 0$

Nollställe i H.H.P. $\Longrightarrow \frac{1}{G(s)}$ är instabilt $\Longrightarrow$ Svårt reglerproblem.

Impulssvar

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Faltning: $$\implies y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Integralen är en viktad "summa" av gamla $(0 \leq \tau \leq t)$ insignaler (dynamik).

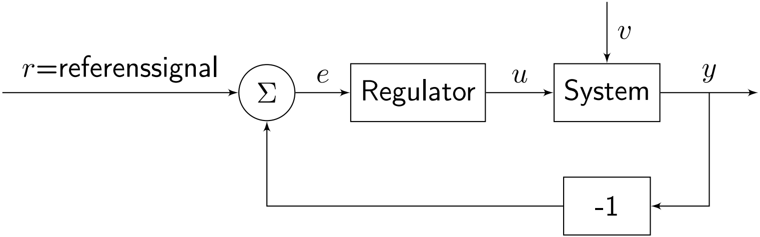
Funktionen $g(t)$ kallas *impulssvaret*.

Example (Integrator)

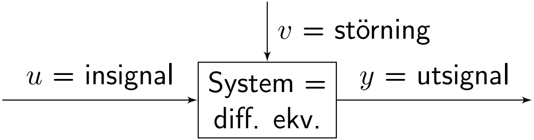
$$g(\tau) = 1$$

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

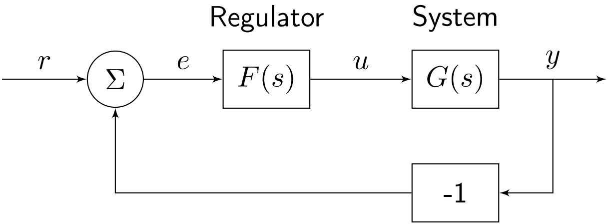
Återkoppling



Reglerfelet ges av $e = r - y$.



Blockdiagram



$$\implies \begin{cases} Y(s) = G(s)F(s)E(s) \\ E(s) = R(s) - Y(s) \end{cases}$$

$$\implies Y = GFR - GFY$$

$$\implies [1 + GF]Y = GFR$$

Återkopplade Systemets Överföringsfunktion

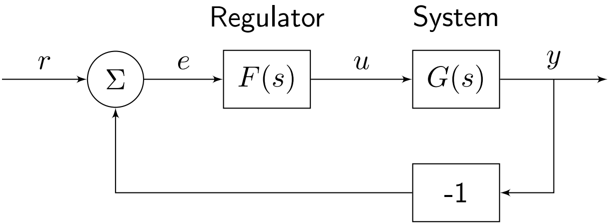
$$[1 + GF]Y = GFR$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto y(t)$.

$$\implies Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}}_{G_c(s)} R(s)$$

$G_c(s)$ kallas det *återkopplade (closed loop) systemets överföringsfunktion*.

Samband Referens till Reglerfel

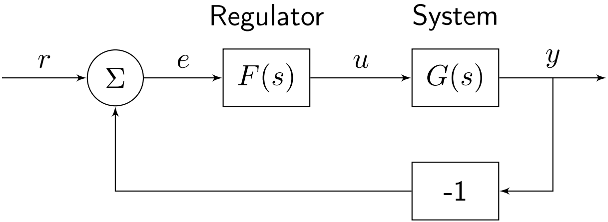


$$Y(s) = G(s)F(s)E(s)$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto e(t)$.

$$\implies E(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} R(s)$$

Referens-signal till Insignal



$$U(s) = F(s)E(s)$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto u(t)$.

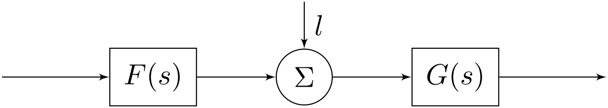
$$\implies U(s) = \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)} R(s)$$

Insignalstörning till Utsignal

Vi kan även få ut ett uttryck som innehåller

$$\frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}$$

Detta berör en insignalsstörning ($l(t) \mapsto y(t)$), som vi kommer se senare i kursen.



Slutna Systemets Poler

Observera att alla dessa uttryck innehåller $1 + G(s)F(s)$, dvs. $1 + \underbrace{\text{kretsförstärkningen}}_{G(s)F(s)}$ i nämnaren,

$\Longrightarrow$

Slutna systemets poler ges av

$$1 + G(s)F(s) = 0.$$

Bestämmer stabilitet för det återkopplade systemet!

Nästa gång PID-Reglering

Läxa :

Repetera Laplace och differentialekvationer!