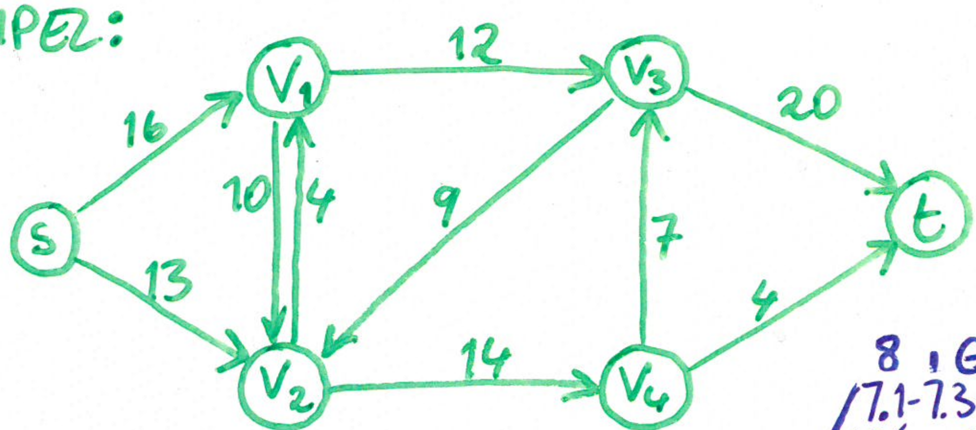
MAXIMALT FLÖDE I GRAF

INDATA: DIGRAF G MED KANTVIKTER $c(u,v) \geq 0$

TVÅ SPECIELLA HÖRN I G: KÄLLAN s, UTLOPPET t

UTDATA: ETT MAXIMALT FLÖDE GENOM GRAFEN FRÅN s TILL t SÅ ATT HÖGST $c(u,v)$ FLÖDAR GENOM KANTEN (u,v) FÖR VARJE KANT.

EXEMPEL:



8 I GOODRICH
(7.1-7.3 I KLEINBERG
18 (FÖRR 11) I BIGGS,
27.2 I CLR,
33 I SEDGEWICK,
13.3 I GRIMALDI)

ALGORITMIDÉ: (FORD-FULKERSON)

- STARTA MED FLÖDE 0
- WHILE ($\exists$ STIG LÄNGS VILKEN FLÖDET KAN ÖKA) DO
  ÖKA FLÖDET LÄNGS DENNA STIG SÅ MYCKET DET GÅR

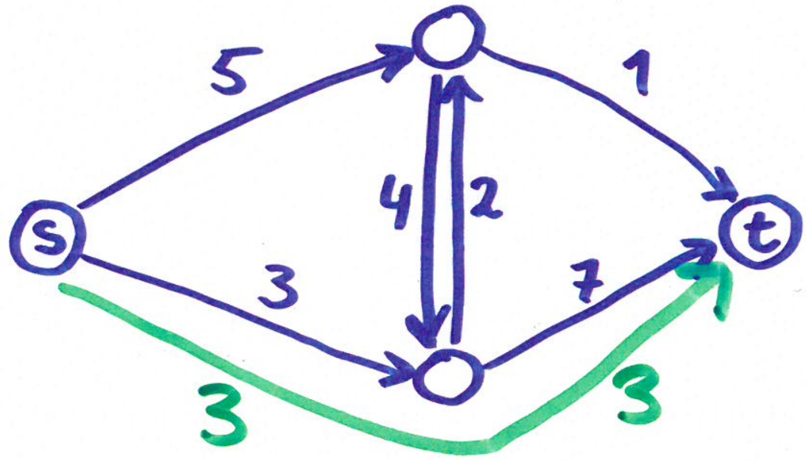
TIDSKOMPLEXITET: $O(|V|^3)$ (FÖR BÄSTA IMPLEMENTATIONEN)

SATS: OM $c(u,v) \in \mathbb{N}$ (HELTALSKAPACITETER) SÅ PRODUCERAR ALGORITMEN ETT MAXIMALT FLÖDE MED HELTALSFLÖDEN I VARJE KANT.

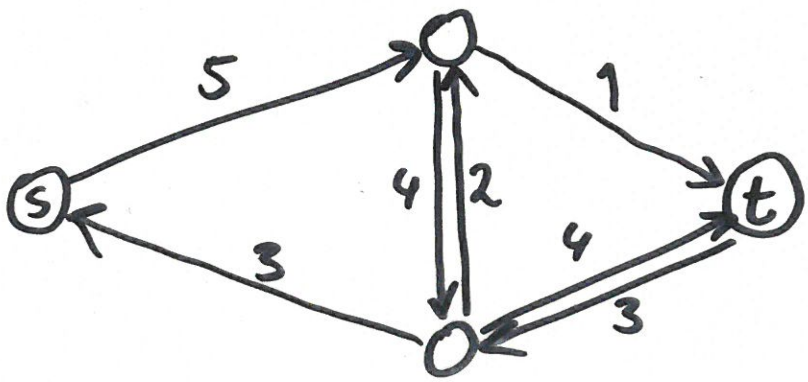
RESTFLÖDESGRAFEN

ETT ENKELT SÄTT ATT HITTA STIGAR SOM ÖKAR FLÖDET ÄR ATT ANVÄNDA RESTFLÖDESGRAFEN G_f SOM HAR SAMMA HÖRN SOM G OCH EN KANT FRÅN u TILL v OM FLÖDET LOKALT FRÅN u TILL v KAN ÖKAS; KANTENS KAPACITET $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, DÄR $f(u,v) = -f(v,u)$.

EXEMPEL: DET UTRITADE FLÖDET 3 I GRAFEN:



GER RESTFLÖDESGRAFEN:



EDMONDS-KARPS ALGORITM FÖR FLÖDE

FORD-FULKERSONS METOD DÄR DEN STIG SOM HAR MINST KANTER ALLTID VÄLJS.

IMPLEMENTATION:

HITTA KORTASTE STIGEN I RESTFLÖDESGRAFEN MED HJÄLP AV BREDDENFÖRSTSÖKNING FRÅN S.

KOMPLEXITETSANALYS:

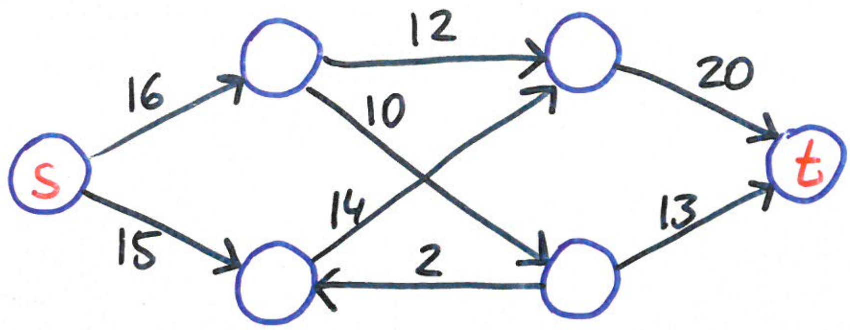
ATT HITTA KORTASTE STIGEN TAR TID $O(|E|)$.

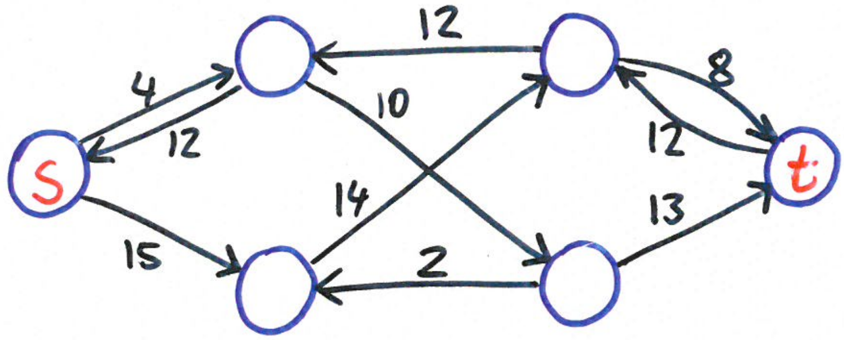
ATT UPPDATERA FLÖDET LÄNGS STIGEN TAR TID $O(|V|)$.

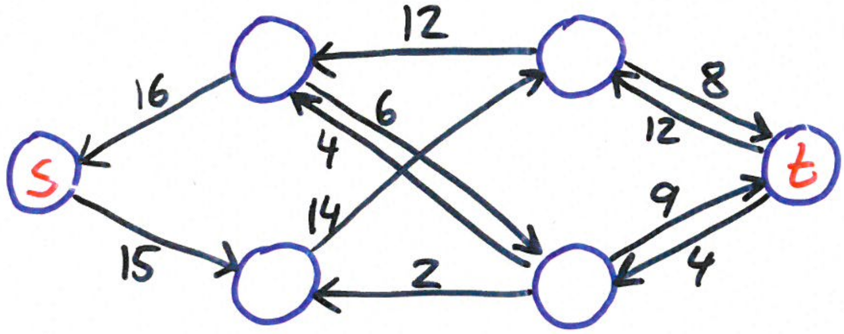
> LEMMA: (BEVISET INGÅR INTE I KURSEN)
> OM DEN KORTASTE STIGEN VÄLJS I FORD-FULKERSONS METOD HITTAS DET MAXIMALA FLÖDET EFTER HÖGST $|V||E|$ VARV I SLINGAN.

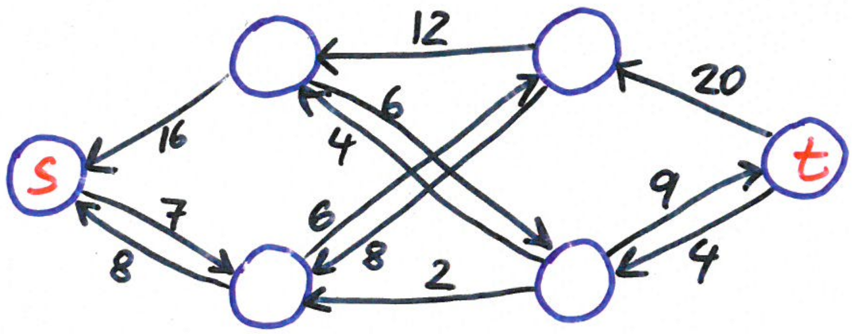
TOTAL TIDSKOMPLEXITET: $O(|V||E| \cdot |E|) = O(|V||E|^2)$

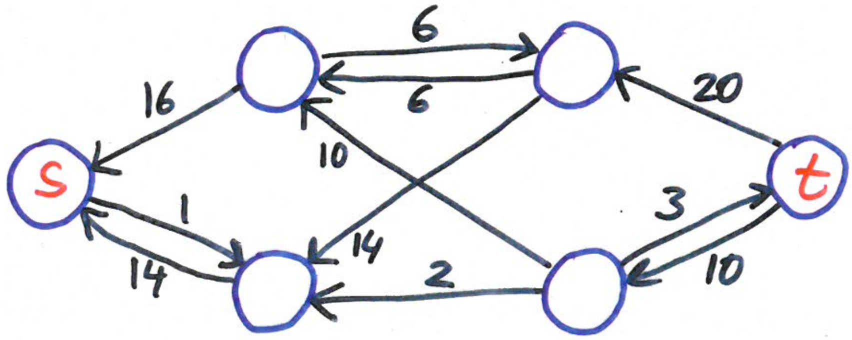
Flödesexempel











Totalt flöde: 30

MAXIMALT FLÖDE = MINIMALT SNITT

GIVET ETT SNITT $(S, V-S)$ I FLÖDESGRAFEN SÅ ATT $s \in S$ OCH $t \in V-S$.

LÅT $c(S, V-S)$ VARA SUMMAN AV VIKTERNA PÅ DOM KANTER SOM KORSAR SNITTET FRÅN S TILL $V-S$.

IDÉ: FLÖDET ÄR MINDRE ÄN $c(S, V-S)$ FÖR ALLA SNITT

SATS: DET MAXIMALA FLÖDET $= \min c(S, V-S)$

BEVIS: LÅT f VARA ETT MAXIMALT FLÖDE.

DÅ FINNS DET INGEN STIG FRÅN s TILL t I RESTFLÖDESGRAFEN G_f LÄNGS VILKEN FLÖDET KAN ÖKA.

LÅT $S = \{v \in V : \exists \text{ STIG FRÅN } s \text{ TILL } v \text{ I } G_f\}$

$(S, V-S)$ ÄR ETT SNITT

FÖR VARJE KANT (u, v) SOM KORSAR SNITTET FRÅN S TILL $V-S$ GÄLLER $f(u,v) = c(u,v)$

$\Rightarrow$ FLÖDET $= c(S, V-S)$

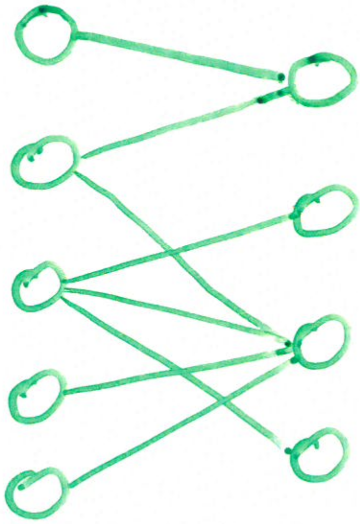
BIPARTIT MATCHNING

INDATA: BIPARTIT GRAF $\langle U \cup V, E \rangle$

UTDATA: EN MATCHNING $M \subseteq E$ AV MAXIMAL STORLEK

M ÄR EN MATCHNING OM INGA KANTER I M HAR NÅGON GEMENSAM ÄNDPUNKT.

EXEMPEL:



REDUKTION AV BIPARTIT MATCHNING TILL FLÖDE:

BIPARTITE-MATCHING$(U, V, E) =$

- KONSTRUERA GRAF $\langle V', E' \rangle$ SOM

  $V' = U \cup V \cup \{s, t\}$

  $E' = \{(u,v) : u \in U, v \in V, (u,v) \in E\} \cup$
  $\cup \{(s,u) : u \in U\} \cup$
  $\cup \{(v,t) : v \in V\}$

  $c(e) = 1 \ \forall e \in E'$
- RETURN (FORD-FULKERSON$(V', E') \cap E$)