# TALGISSNING MED TUFF MOTSTÅNDARE

| | |
|---|---|
| GISSA ETT TAL MELLAN 1 OCH 10 | 1 – 10 |
| **3** | |
| STÖRRE! | 4 – 10 |
| **8** | |
| MINDRE! | 4 – 7 |
| **5** | |
| STÖRRE! | 6 – 7 |
| **6** | |
| STÖRRE! | 7 – 7 |

DU KLARADE DET INTE PÅ 4 GISSNINGAR. RÄTT SVAR VAR 7.

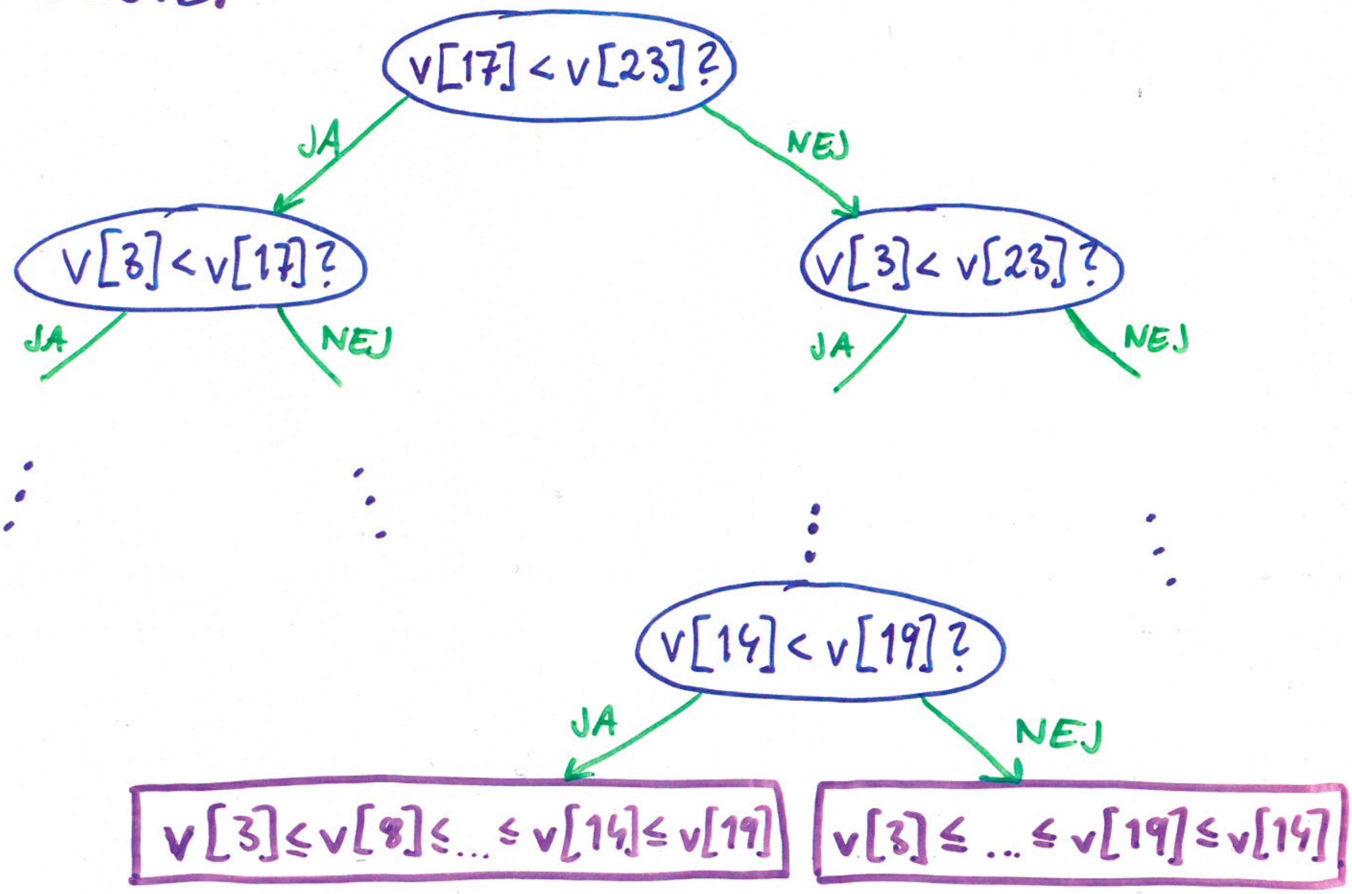
```
GISSNING ← 0
MIN ← 1; MAX ← 10
WRITE("GISSA ETT TAL MELLAN " MIN " OCH " MAX)
WHILE MIN < MAX DO
    GISSNING ← GISSNING + 1
    X ← READINTEGER()
    M ← (MIN + MAX)/2
    IF X < M THEN WRITE("STÖRRE!") ELSE WRITE("MINDRE!")
    IF X < M AND X ≥ MIN THEN MIN ← X+1
    IF X ≥ M AND X ≤ MAX THEN MAX ← X−1
WRITE("DU KLARADE DET INTE PÅ " GISSNING " GISSNINGAR)
WRITE("RÄTT SVAR VAR " MIN)
```

# HUR MÅNGA JÄMFÖRELSER KRÄVS MINST FÖR ATT SORTERA $n$ ELEMENT?

$$A: \{n \text{ ELEMENT}\} \rightarrow \{n\text{-PERMUTATIONER}\}$$

ANTA ATT DEN ENDA OPERATIONEN (FÖRUTOM TILLDELNING) SOM KAN GÖRAS PÅ ELEMENT ÄR JÄMFÖRELSE MELLAN TVÅ ELEMENT.

DÅ KAN ALGORITMEN A BESKRIVAS SOM ETT BESLUTSTRÄD:




TRÄDETS HÖJD = TIDSKOMPLEXITETEN

ANTALET LÖV $\geq$ ANTALET PERMUTATIONER $= n!$

OM INGA PERMUTATIONER PÅ FÖRHAND KAN UTESLUTAS

ETT BINÄRTRÄD AV HÖJD $h$ HAR HÖGST $2^h$ LÖV

$\Rightarrow$ TIDSKOMPLEXITETEN ÄR $\Omega(n \log n)$

# KOMPLEXITET FÖR MEDIANPROBLEMET

**PROBLEM:** HITTA MEDIANEN BLAND $n$ ELEMENT

> HUR MÅNGA JÄMFÖRELSER KRÄVS FÖR ATT HITTA MEDIANELEMENTET I VÄRSTA FALLET?

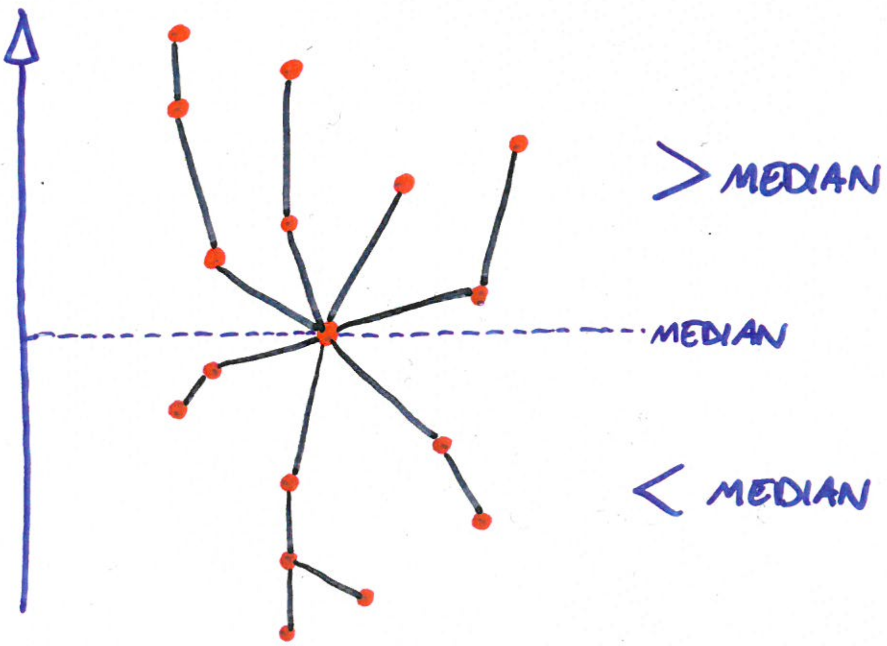
## TRIVIAL ÖVRE GRÄNS:

FÖLJANDE ALGORITM GÖR $O(n \log n)$ JÄMFÖRELSER

MERGESORT$(S[1..n])$; RETURN $S\left[\frac{n+1}{2}\right]$

## TRIVIAL UNDRE GRÄNS:

VARJE ALGORITM SOM HITTAR MEDIANEN MÅSTE GÖRA EN KEDJA AV JÄMFÖRELSER MELLAN VARJE ANNAT TAL OCH MEDIANEN:




ALLTSÅ KRÄVS MINST $n-1$ JÄMFÖRELSER.

# Undre gräns för median med tuff motståndare

Idé: Visa att en tuff motståndare kan tvinga algoritmen att göra onyttiga jämförelser

Jämförelsen $x > y$ är onyttig om $x >$ medianen och $y <$ medianen.

## Taktik för tuffa motståndaren:

Välj 0 som median

Tilldela element ett värde först då algoritmen vill jämföra det med något annat element

| Jämförelse mellan | Svara | Tilldela |
|---|---|---|
| nytt och nytt | $>$ | första positivt, andra negativt |
| positivt och nytt | $>$ | negativt tal |
| negativt och nytt | $<$ | positivt tal |
| känt och känt | sanningen | — |

När $\frac{n-1}{2}$ negativa eller $\frac{n-1}{2}$ positiva värden har tilldelats har inte motståndaren något val längre.

Varje algoritm kan på så sätt tvingas att göra $\frac{n-1}{2}$ onyttiga jämförelser utöver dom $n-1$ nyttiga.

Vi får undre gränsen $n-1+\frac{n-1}{2} = \frac{3n-3}{2}$ jämförelser.

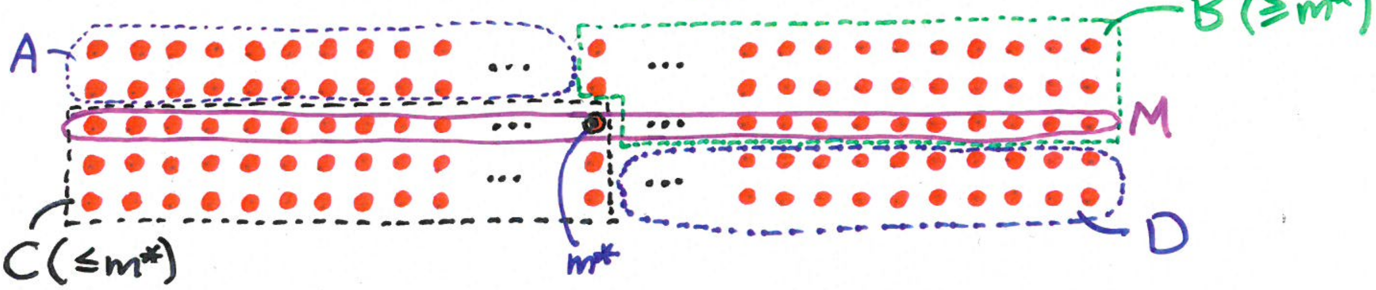
Bästa kända undre gränsen är $2{,}01n$ [Dor, Håstad, Ulfberg, Zwick 2001]

# HITTA i-TE MINSTA TALET I S

**SELECT(S[1..n], i) =**

IF $n \le 5$ THEN SORTERA(S[1..n]); RETURN S[i]

DELA UPP S I $\frac{n}{5}$ GRUPPER MED 5 TAL I VARJE.
HITTA MEDIANEN I VARJE GRUPP OCH PARTITIONERA GRUPPEN EFTERDEN.
$M \leftarrow \{\text{MEDIANER}\}$
$m^* \leftarrow \text{SELECT}\left(M, \frac{n/5}{2}\right)$




$S_1 \leftarrow C \cup \{x \in A \cup D : x \le m^*\}$
$S_2 \leftarrow B \cup \{x \in A \cup D : x > m^*\}$

IF $i = |S_1|$ THEN RETURN $m^*$
IF $i < |S_1|$ THEN RETURN SELECT$(S_1, i)$
ELSE RETURN SELECT$(S_2, i - (n - |S_2|))$

**KOMPLEXITETSANALYS:** (ANTAL JÄMFÖRELSER)

$$T(n) \le 6 \cdot \frac{n}{5} + T\left(\frac{n}{5}\right) + 2 \cdot \frac{n}{5} + T\left(\frac{n}{5} + \frac{n}{2}\right) = 1.6n + T(0.2n) + T(0.7n)$$

HITTA MEDIANERNA I GRUPPERNA
HITTA $m^*$
FÖRDELA PÅ $S_1$ OCH $S_2$
REKURSION PÅ $S_1$ ELLER $S_2$

MAN KAN VISA ATT $T(n) \le 16n$
DETTA GER ÖVRE GRÄNSEN $16n$ FÖR MEDIANPROBLEMET.
BÄSTA KÄNDA ÖVRE GRÄNSEN ÄR $2.95n$ [DOR, ZWICK 1999]