FÖRELÄSNING I ADK

REDUKTIONER

KAN ANVÄNDAS TILL ATT

- VISA POSITIVA RESULTAT (HITTA ALGORITMER)
- VISA NEGATIVA RESULTAT (UNDRE GRÄNSER)
- VISA ATT ETT PROBLEM ÄR SVÅRARE ÄN ETT ANNAT
- VISA ATT TVÅ PROBLEM ÄR LIKA SVÅRA

OLIKA VARIANTER AV PROBLEM

OLIKA VARIANTER AV REDUKTIONER

REPRESENTANTPROBLEMET

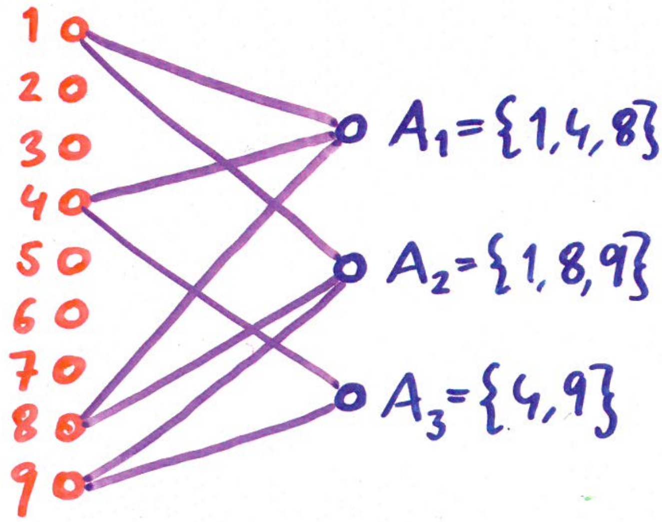
INDATA: k stycken mängder $A_1, \ldots, A_k$ av heltal mellan 1 och k^2

UTDATA: En mängd med k olika tal $a_1, \ldots, a_k$ så att $a_i \in A_i$ för $1 \leq i \leq k$

ALGORITM: Reducera problemet till bipartit matchning!

```
Representant(A_1,...,A_k) =
   U ← {1,...,k²}
   V ← {A_1,...,A_k}
   E ← {(x,A): x∈U, A∈V, x∈A}
   M ← BipartitMatchning(U,V,E)
   return {x: (x,A)∈M för något A}
```

EXEMPEL: $k=3$, $A_1=\{1,4,8\}$, $A_2=\{1,8,9\}$, $A_3=\{4,9\}$



GENERELL VIKTAD MATCHNING

DET FINNS EN POLYNOMISK ALGORITM SOM LÖSER MAXIMAL MAXMATCHNING:

INDATA: GRAF $G=(V,E)$, KANTVIKTER $c: E \to \mathbb{N}$

UTDATA: MATCHNING $M \subseteq E$ SOM DELS INNEHÅLLER SÅ MÅNGA KANTER SOM MÖJLIGT OCH DELS HAR SÅ STOR SAMMANLAGD VIKT SOM MÖJLIGT.

BESKRIV EN ALGORITM FÖR PROBLEMET MINIMAL MAXMATCHNING DÄR SAMMANLAGDA VIKTEN AV KANTERNA I MAXMATCHNINGEN ÄR MINIMAL!

REDUCERA MINIMAL MAXMATCHNING TILL MAXIMAL MAXMATCHNING

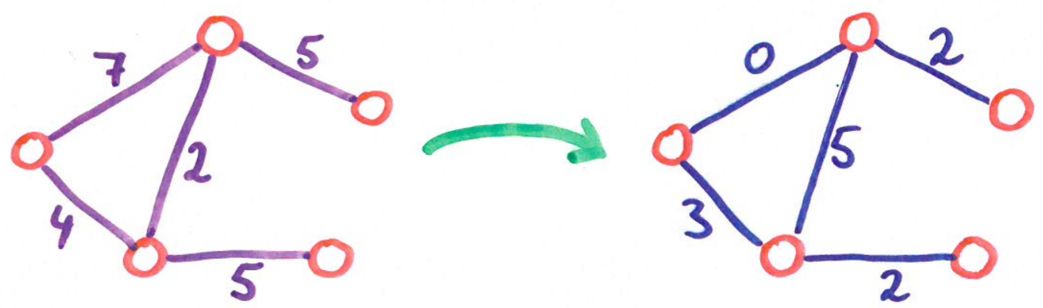
MINIMALMAXMATCHNING$(G'=(V',E'), f: E' \to \mathbb{N})=$

$w \leftarrow \max_{e \in E'} f(e)$

DEFINIERA $c(e)$ SOM $w - f(e)$

$M \leftarrow$ MAXIMALMAXMATCHNING(G', c)

RETURN M



VISA NEGATIVA RESULTAT MED REDUKTION

```
SORTERING(A[1..n]) =
  T ← BYGGSÖKTRÄD(A)
  INDEX ← 1
  INORDER(T)
  RETURN A

INORDER(T) =
  IF T≠NIL THEN
    INORDER(T.LEFT)
    A[INDEX] ← T.VALUE
    INDEX ← INDEX+1
    INORDER(T.RIGHT)
```

VI HAR REDUCERAT SORTERING TILL SÖKTRÄDSBYGGE.

TIDEN FÖR SORTERING ÄR TIDEN FÖR BYGGSÖKTRÄD PLUS TIDEN FÖR INORDER (SOM ÄR $O(n)$).

OM BYGGSÖKTRÄD GICK SNABBARE ÄN $\Theta(n \log n)$ SKULLE DET ALLTSÅ GÅ ATT SORTERA SNABBARE ÄN $\Theta(n \log n)$.

REDUKTIONEN HAR FÖRT ÖVER DEN UNDRE GRÄNSEN PÅ $\Omega(n \log n)$ JÄMFÖRELSER FÖR SORTERING TILL SÖKTRÄDSBYGGE.

OM P KAN REDUCERAS TILL Q
OCH P ÄR SVÅRT
SÅ ÄR Q OCKSÅ SVÅRT!

MAX KLICK

INDATA: GRAF G

UTDATA: ANTAL HÖRN I DEN STÖRSTA KLICKEN (FULLSTÄNDIGA DELGRAFEN) I G

REDUCERA MAX KLICK TILL MAX OBEROENDE MÄNGD!

MAXKLICK(G) =
  $\overline{G}$ ← KOMPLEMENTGRAFEN TILL G
  RETURN MAXOBERMÄNGD($\overline{G}$)

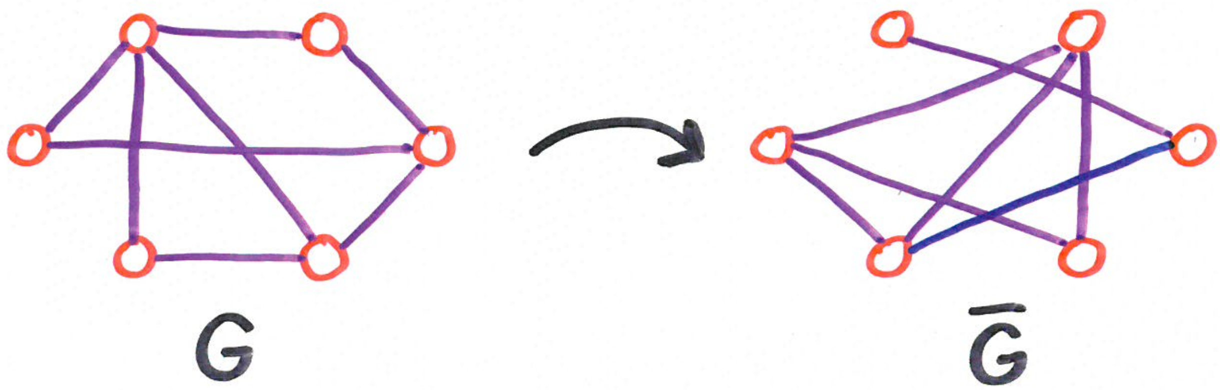
MAX OBEROENDE MÄNGD

INDATA: GRAF G

UTDATA: ANTAL HÖRN I DEN STÖRSTA OBEROENDE MÄNGDEN (HÖRN UTAN KANTER MELLAN) I G

REDUCERA MAX OBEROENDE MÄNGD TILL MAX KLICK!

MAXOBEROENDEMÄNGD(G) =
  $\overline{G}$ ← KOMPLEMENTGRAFEN TILL G
  RETURN MAXKLICK($\overline{G}$)



MAX KLICK OCH MAX OBEROENDE MÄNGD ÄR LIKA SVÅRA!

OLIKA VARIANTER AV PROBLEM

1. BESLUTSPROBLEM (UTDATA ÄR SANT/FALSKT)

INDATA: GRAF G, HELTAL K

FRÅGA: FINNS DET EN KLICK AV STORLEK ≥K I G?

2. OPTIMERINGSPROBLEM (MAXIMERA EN MÅLFUNKTION)

INDATA: GRAF G

UTDATA: STORLEKEN AV STÖRSTA KLICKEN I G

3. KONSTRUKTIONSPROBLEM

INDATA: GRAF G

UTDATA: HÖRNEN I EN KLICK AV MAXSTORLEK I G

Reduktioner mellan problemvarianter

Reducera optimeringsproblem till beslutsproblem:

```
MaxKlick(G=(V,E)) =
   i←1; j←|V|
   WHILE i<j DO
      m←⌈(i+j)/2⌉
      IF BeslutKlick(G,m) THEN i←m
         ELSE j←m-1
   RETURN i
```

Reducera konstruktionsproblem till optimeringsproblem:

```
KonstruktivMaxKlick(G=(V,E)) =
   m←MaxKlick(G)
   S←V
   FOR EACH u∈V DO
      IF MaxKlick(S-{u})=m THEN
         S←S-{u}
   RETURN S
```

TURING- OCH KARPREDUKTIONER

EN TURINGREDUKTION AV PROBLEMET P TILL PROBLEMET Q ÄR EN ALGORITM FÖR P SOM ANROPAR EN ALGORITM FÖR Q EN ELLER FLERA GÅNGER.

```
P(x) =
   ⋮
   (HÄR ANROPAS ALGORITM FÖR Q)
   ⋮
   RETURN y
```

EN KARPREDUKTION AV P TILL Q ÄR DET SPECIALFALL AV TURINGREDUKTION DÄR P OCH Q ÄR BESLUTSPROBLEM, DÄR ALGORITMEN FÖR Q BARA ANROPAS EN GÅNG, OCH DÄR RESULTATET FRÅN DEN ALGORITMEN DIREKT RETURNERAS

```
P(x) =
   KONSTRUERA EN PROBLEM-
   INSTANS y TILL Q
   RETURN Q(y)
```