Algoritmer, datastrukturer och komplexitet, hösten 2016

Uppgifter till övning 6

Algoritmkonstruktion

På denna övning är det också **inlämning av skriftliga lösningar av teoriuppgifterna till labb 3** och muntlig redovisning av teoriuppgifterna.

Inuti eller utanför? Låt P vara en konvex n-hörnig polygon beskriven som en array av hörnen $p_1, p_2, \ldots p_n$ i cyklisk ordning. Konstruera en algoritm som talar om ifall en given punkt q är inuti P. Algoritmen ska gå i tid $O(\log n)$ i värsta fallet.

Sortering av små heltal Konstruera en algoritm som sorterar n heltal som alla ligger i intervallet $[1..n^3]$ i tid $O(n)$ med enhetskostnad.
Tips: tänk på räknesortering och radixsortering.

Hitta det saknade talet På en datafil ligger 999 999 999 tal, nämligen alla heltal mellan 1 och 1 000 000 000 utom ett. Vilket tal är det som saknas? Konstruera en algoritm som löser detta problem i konstant minne och linjär tid i en beräkningsmodell som har 32-bitsaritmetik (dvs kan räkna med tal av storlek mindre än $2^{31} = 2147483648$).

Komplex multiplikation Om man multiplicerar två komplexa tal $a + bi$ och $c + di$ på det vanliga sättet krävs fyra multiplikationer och två additioner av reella tal. Eftersom multiplikationer är dyrare än additioner (och subtraktioner) lönar det sig att minimera antalet multiplikationer om man ska räkna med stora tal. Hitta på en algoritm som bara använder tre multiplikationer (men fler additioner) för att multiplicera två komplexa tal.

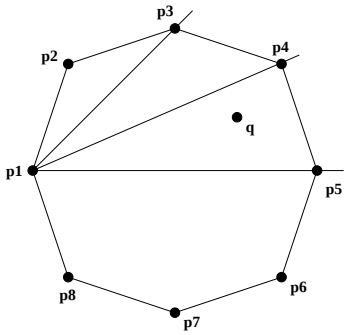
Tvådimensionell Fouriertransform Anta att du har tillgång till en FFT-implementation för det endimensionella fallet, men att du behöver transformera tvådimensionella data, till exempel transformera en bild given som en matris $(a_{ij})_{i,j\in\{0,\ldots,N-1\}}$ till ett tvådimensionellt frekvensspektrum. Hur bör du utnyttja FFT för detta? Vad blir tiden?

Definitionen av 2D-Fouriertransformen:

$$\hat{a}_{kl} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} w^{ik+jl}$$

där w är en lämplig enhetsrot ($w^N = 1$).

Binärträd med speglad struktur Två binära träd sägs ha *speglad struktur* om det ena är en spegelbild av det andra, det vill säga att om man byter vänster och höger överallt i det ena trädet så blir träden strukturekvivalenta. Konstruera och analysera tidskomplexiteten för en effektiv dekompositionsalgoritm som avgör ifall två binärträd har speglad struktur.



Figur 1: En konvex polygon och linjerna som algoritmen använder för att halvera den.

Partyproblemet Indata är en lista med n personer, ett heltal k och en lista med vilka personer som känner varandra. Du vill bjuda så många av personerna som möjligt på ditt party, men för att alla ska trivas vill du att varje inbjuden gäst ska känna minst k av dom övriga gästerna. Konstruera och analysera en algoritm som löser detta problem i linjär tid i indatas storlek.

Lösningar

Lösning till Inuti eller utanför?
Om polygonen inte hade varit konvex hade vi räknat antalet skärningar polygonen har med en linje från q till en punkt utanför P, vilket tar tid $O(n)$, men det har vi inte tid med här. Istället kommer vi att använda en intervallhalveringsliknande sökning för att utesluta hälften av (den återstående) polygonen i taget ända tills bara en triangel återstår. Därefter kan vi lätt (med ett konstant antal jämförelser) avgöra ifall q ligger i P. Se figur 1.

$InsideConvex(P, q, l, u) =$
  if $u = l + 1$ **then** $\quad /* \text{ en triangel } */$
    välj en punkt q' utanför triangeln p_1–p_l–p_u
    if linjen q–q' skär exakt en av kanterna i triangeln **then**
      return inuti
    else
      return utanför
  else
    $mid \leftarrow \lceil \frac{l+u}{2} \rceil$
    if q är på samma sida om linjen p_1–p_{mid} som p_{mid+1} **then**
      return $InsideConvex(P, q, mid, u)$
    else
      return $InsideConvex(P, q, l, mid)$

Algoritmen anropas med $InsideConvex(P, q, 2, n)$.
Om vi antar att $InsideConvex(P, q, 2, n)$ tar tid $T(n)$ så får vi rekursionsekvationen

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

som har lösningen $c \log n$. Tidskomplexiteten blir alltså $T(n) \in O(\log n)$. □

Lösning till Sortering av små heltal
Betrakta heltalen skrivna i bas n. Alla tal har då (högst) tre siffror, utom n^3 som skrivs som 1000 och kan hanteras separat. (Gå igenom alla tal, plocka ut alla förekomster av n^3 och lägg dom sist i den sorterade följden.) Lägg till inledande nollor på tal som är mindre än n^2. Gör nu radixsortering på talen. Eftersom det är tresiffriga tal blir det tre omgångar i radixsorteringen, där man i varje omgång ska sortera talen efter en siffra i intervallet $[0..n-1]$. En sån sortering görs i linjär tid med räknesortering (som i implementationen från föreläsning 16 är stabil).

Analys: Tre omgångar görs och varje omgång tar tid $O(n)$. Specialhanteringen av n^3 tar inte heller mer än $O(n)$. Totalt blir tiden alltså $O(n)$. □

Ledning till Hitta det saknade talet
Summera alla tal modulo till exempel 1 000 000 000.

Lösning till Komplex multiplikation
Egen övning. □

Lösning till Tvådimensionell Fouriertransform
Notera först att faktorn w^{ik} kan flyttas ur den innersta summan. Om vi nu ser den innersta summan som en endimensionell Fouriertransform $\hat{b}_{il}$ så är $\hat{a}_{kl}$ en endimensionell transform av $\hat{b}_{il}$.

$$\hat{b}_{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} a_{ij}w^{jl}, \qquad \hat{a}_{kl} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \hat{b}_{il}w^{ik}$$

Vi har alltså utnyttjat att Fouriertransformen är separabel. Ovanstående ekvationer säger att vi kan Fouriertransformera tvådimensionella data genom att först transformera varje kolumn i matrisen (a_{ij}) och sedan transformera raderna i den resulterande matrisen (b_{il}) (eller tvärtom om man vill det). Algoritmen blir då

2D-FFT$(a_{0,0}, a_{0,1}, \ldots, a_{N-1,N-1}, N) =$
    for $i \leftarrow 0$ **to** $N-1$
        $b_{i,0}, \ldots, b_{i,N-1} \leftarrow FFT(a_{i,0}, a_{i,1}, \ldots, a_{i,N-1}, N)$
    for $i \leftarrow 0$ **to** $N-1$
        $c_{0,i}, \ldots, c_{N-1,i} \leftarrow FFT(b_{0,i}, b_{1,i}, \ldots, b_{N-1,i}, N)$
    return $c_{0,0}, c_{0,1}, \ldots, c_{N-1,N-1}$

FFT anropas $2N$ gånger. Eftersom varje anrop tar $O(N \log N)$ blir totaltiden $O(N^2 \log N)$. □

Lösning till Binärträd med speglad struktur
Vi använder dekomposition för att stega oss ner i båda träden samtidigt. För att träden ska vara varandras spegelbilder måste vänstra delträdet till första trädet vara spegelbilden av högra delträdet till andra trädet och högra delträdet till första trädet vara spegelbilden av vänstra delträdet till andra trädet. Basfallet blir att minst ett av träden är tomt. I så fall är träden spegelbilder av varandra bara om båda träden är tomma.

SpegladeTräd(T_1, T_2**)=**
    if T_1 **=NIL or** T_2 **=NIL then**
        return T_1 **=NIL and** T_2 **=NIL**
    return SpegladeTräd(T_1**.left,**T_2**.right) and SpegladeTräd(**T_1**.right,**T_2**.left)**

Eftersom funktionen kommer att anropas (högst) en gång för varje delträd (rot) och arbetet i ett funktionsanrop förutom rekursionen är konstant så blir komplexiteten linjär i trädens storlek.

Det är lätt att inse att algoritmen är korrekt med hjälp av så kallad strukturell induktion, det vill säga induktion över trädens struktur. Vi kollar först att basfallet stämmer (om ena trädet är tomt så måste också det andra trädet vara tomt för att dom ska vara spegelbilder) och kollar sedan att induktionssteget stämmer (om första trädets vänstra delträd är spegelbilden av andra trädets högra delträd och första trädets högra delträd är spegelbilden av andra trädets vänstra delträd så måste träden vara varandras spegelbilder). □

Lösning till Partyproblemet

Anta att listan med vilka gäster som känner varandra består av m stycken rader. Det är enkelt att representera indata som en graf $G = (V, E)$ där varje person motsvarar ett hörn och varje kant (x, y) motsvarar att person x och y känner varandra. Representera grafen med kantlistor.

Den sökta lösningen är den största (inducerade) delgrafen där varje hörn har gradtal minst k. Vi kan hitta denna delgraf genom att plocka bort varje hörn som har gradtal mindre än k. När ett hörn plockas bort tas samtidigt alla kanter till hörnet bort, varför andra hörn får lägre gradtal och kan behöva plockas bort. Detta implementeras enklast med en variabel d_x i varje hörn x som håller reda på det aktuella gradtalet och som uppdateras varje gång en kant till det hörnet plockas bort. Låt oss också ha en kö Q där vi lägger alla hörn som har gradtal mindre än k i väntan på att deras kanter ska plockas bort.

```
foreach x ∈ V do
   if d_x < k then Q.Put(x)
while not Q.Empty() do
    x ← Q.Get()
    foreach (x, v) ∈ x.kantlista do
       if d_v ≥ k then
          d_v ← d_v − 1
          if d_v < k then Q.Put(v)
write 'Lösningen består av:'
foreach x ∈ V do
   if d_x ≥ k then write x
```

Notera först att så fort d_v blir mindre än k så läggs hörnet v in i kön och efter att det hamnat där så kommer inte d_v att ändras mer (på grund av if-satsen). Eftersom det finns n hörn och varje hörn behandlas ett konstant antal gånger (initiering av Q, köinsättning, köutplockning, utskrift), och eftersom det finns m kanter och varje kant behandlas högst två gånger (den förekommer i två kantlistor) så blir totala komplexiteten $O(n + m)$, alltså linjärt i indatas storlek.

Det är enkelt att se att algoritmen är korrekt eftersom varje hörn som skrivs ut i lösningen fortfarande har minst k grannar kvar i grafen, och inget hörn som inte har färre än k grannar kvar i grafen har plockats bort under algoritmens gång. □
