

Om potenser

Du är säkert välbekant med potenslagarna, som säger att om x och y är reella tal, och r är ett positivt reellt tal, så gäller att

$$\text{P1: } r^x r^y = r^{x+y}, \quad \text{P2: } (r^x)^y = r^{xy}, \quad \text{P3: } \frac{r^x}{r^y} = r^{x-y}.$$

Men varför gäller dessa räkneregler? För att kunna besvara den frågan måste vi först reda ut vad vi menar med ett uttryck r^x ; du vet säkert att 2^5 tolkas som "2 multiplicerat med sig självt 5 gånger", men vad menar vi när vi skriver till exempel $2^{1/3}$ eller $\pi^{-\sqrt{2}}$?

Vi börjar med att definiera potenser där exponenten är ett positivt heltal.

Positiva heltalsexponenter

Definition 1. Om r är ett reellt tal och n är ett positivt heltal definierar vi

$$r^n \stackrel{\text{def}}{=} r \cdot r \cdot \dots \cdot r \quad (n \text{ stycken faktorer}).$$

För positiva heltal n är alltså r^n ett förkortat skrivsätt för upprepad multiplikation. Potenslagarna blir en enkel konsekvens av detta.

Uppgift 1. Visa att med denna definition gäller potenslagarna P1 – P3 för alla positiva heltalsexponenter x och y och för alla reella tal r som bas, med undantaget att vi i P3 måste kräva att $r \neq 0$ och att $x > y$. Förklara också varför vi måste göra dessa inskränkningar för P3.

Uppgift 2. Visa också att

$$\text{P4: } (rs)^x = r^x s^x$$

gäller för godtyckliga reella tal r och s och ett positivt heltal x .

Observera att påståendet att $r^n = r \cdot r \cdot \dots \cdot r$ (n st) är en *definition* (en överenskommelse om vad vänsterledet betyder), medan P1 – P4 är *satser som följer med logisk nödvändighet* ur vår definition av r^n .

Vi ska nu successivt utvidga definitionen av r^x till att omfatta andra typer av exponenter. För att det ska vara möjligt kommer vi i vissa fall att tvingas begränsa basen r till att vara ett positivt reellt tal.

Godtyckliga heltalsexponenter

Uttrycket r^0 saknar mening enligt Definition 1, det är nonsens att säga att det skulle betyda " r multiplicerat med sig självt 0 gånger". Så vad ska vi mena med r^0 ?

Låt oss leka med tanken att vi har gett uttrycket r^0 en meningsfull definition, och vi gjort det på ett sätt sådant att potenslagarna P1 – P4 gäller även om någon av exponeterna är lika med noll. I så fall skulle vi få

$$1 = \frac{r^x}{r^x} \stackrel{\text{Enligt P3}}{=} r^{x-x} = r^0.$$

Därför gör vi definitionen

Definition 2. Om $r \neq 0$ är ett reellt tal definierar vi

$$r^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Observera logiken i detta - vi har inte *bevisat* att $r^0 = 1$, det går inte att bevisa egenskaper hos något som inte är definierat. Däremot så såg vi ett mönster som gjorde det rimligt att göra denna *definition*.

Uppgift 3. Enligt Definition 2 är $r^0 = 1$ för alla $r \neq 0$. Å andra sidan kommer vi att se att $0^x = 0$ för alla reella tal $x > 0$. Kan du förklara varför detta visar på svårigheten att definiera 0^0 på ett vettigt sätt?

På samma sätt som ovan kan vi resonera oss fram till den enda rimliga definitionen av r^x för negativa heltal x . Så antag att r^x är definierat för alla heltal x , och låt n och m vara positiva heltal sådana att $n > m$, och låt $x = n - m$. Då är x ett positivt heltal och $-x = m - n$ ett negativt heltal. Om potenslagarna antas gälla får vi

$$r^{-x} = r^{m-n} \stackrel{\text{Enligt P3}}{=} \frac{r^m}{r^n} = \frac{r \cdot r \cdot \dots \cdot r \quad (m \text{ st})}{r \cdot r \cdot \dots \cdot r \quad (n \text{ st})} = \frac{1}{r \cdot r \cdot \dots \cdot r \quad (n - m \text{ st})} = \frac{1}{r^{n-m}} = \frac{1}{r^x}.$$

Återigen finns det alltså bara en tänkbara definition om vi vill att potenslagarna ska fortsätta att gälla.

Definition 3. Om $r \neq 0$ är ett reellt tal och n ett positivt heltal definierar vi

$$r^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r^n}.$$

Vi har nu definierat r^n för alla $r \neq 0$ och alla heltal n . Definitionerna för $n \leq 0$ gjordes på det enda sätt som var möjligt om potenslagarna skulle ha en chans att fortsätta att gälla. Nu är det dags att bevisa att P1 - P4 faktiskt gäller för alla $r \neq 0$ och alla heltalsexponenter x och y . Vi bevisar P2 — de övriga potenslagarna för heltalsexponenter bevisas på likande sätt. För att det inte ska bli ett cirkelbevis får vi bara använda oss av definitionerna vi har gjort och av tidigare bevisade resultat, som till exempel potenslagarna för positiva heltalsexponenter. Vi kommer också att använda oss av vanliga reglerna för bråkräkning samt av att om $r \neq 0$ så är också $r^n \neq 0$ för heltal n .

Bevis av P2 för heltalsexponenter x och y . Vi betraktar sex olika fall.

- I. Om x och y båda är positiva heltal är P2 redan bevisad (Uppgift 1).
- II. Om $x = 0$ gäller för alla heltal y att

$$(r^x)^y = (r^0)^y = 1^y = 1 = r^0 = r^{0y} = r^{xy}.$$

III. Om $y = 0$ gäller för alla heltal x att

$$(r^x)^y = (r^x)^0 = 1 = r^0 = r^{x0} = r^{xy}.$$

IV. Om $x > 0$ och $y < 0$ sätter vi $y = -t$ där t är ett positivt heltal. Då gäller att

$$(r^x)^y = (r^x)^{-t} = \frac{1}{(r^x)^t} = \frac{1}{r^{xt}} = r^{-xt} = r^{xy}.$$

V. Om $x < 0$ och $y > 0$ sätter vi $x = -s$, och får att

$$(r^x)^y = (r^{-s})^y = \left(\frac{1}{r^s}\right)^y = \left(\frac{1}{r^{sy}}\right) = r^{-sy} = r^{xy}.$$

VI. Om slutligen $x = -s < 0$ och $y = -t < 0$ får vi att

$$(r^x)^y = (r^{-s})^{-t} = \left(\frac{1}{r^s}\right)^{-t} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r^s}\right)^t} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r^{st}}\right)} = r^{st} = r^{(-x)(-y)} = r^{xy}.$$

Vi har nu visat att $(r^x)^y = r^{xy}$ för alla tänkbara heltalsexponenter x och y , och beviset är därmed klart.

Uppgift 4. Gå igenom de olika fallen i beviset ovan och motivera varje likhetstecken. Var noga med att bara använda dig av definitionerna vi har gjort eller av sedan tidigare kända (bevisade) räkneregler, som till exempel potenslagarna för positiva heltalsexponenter och reglerna för bråkräkning.

Godtyckliga rationella exponenter

Vi vill nu utvidga potensbegreppet till att vara definierat för rationella tal i exponenten. Antag till att börja med $r^{1/2}$ är definierat så att potenslagarna gäller. Om så vore skulle vi få att

$$r^{1/2} \cdot r^{1/2} = r^{1/2+1/2} = r^1 = r.$$

Det innebär till att börja med att $r \geq 0$ (eftersom ett reellt tal multiplicerat med sig självt aldrig kan bli något negativt). Vidare så ser vi att $r^{1/2}$ måste vara det tal som multiplicerat med sig självt blir r . Detta tal betecknar vi vanligtvis $\sqrt{r}$, så vi bestämmer (definierar) helt enkelt $r^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{r}$.

För positiva heltal p och q kan vi göra samma typ av resonemang för att se vad $r^{1/q}$ respektive $r^{p/q}$ ”borde” betyda. Eftersom

$$(r^{1/q})^q \stackrel{\text{Om P2 ska gälla}}{=} r^{(1/q) \cdot q} = r^1 = r$$

och

$$r^{p/q} \stackrel{\text{Om P2 ska gälla}}{=} (r^{1/q})^p$$

inspireras vi till följande definitioner för rationella exponenter.

Definition 4. Om $r > 0$ är ett reellt tal och $p > 0$ och $q > 0$ är heltal definierar vi

$$r^{p/q} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[q]{r^p} \quad (\text{som är } = (\sqrt[q]{r})^p) \quad \text{och} \quad r^{-p/q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt[q]{r^p}}$$

Nu är det dags att bevisa att P1 – P4 gäller för alla rationella exponenter x och y och alla $r > 0$. Vi avstår dock från att genomföra dessa bevis i denna text.

Godtyckliga reella exponenter

Att strikt definiera potenser med icke-rationella reella exponenter är mer komplicerat, bland annat därför att det är mer komplicerat redan att definiera precis var ett icke-rationellt reellt tal är i sig självt. Man kan dock göra dessa definitioner på ett meningsfullt sätt, och visa att potenslagarna

P1 – P4 gäller för godtyckliga reella exponeter x och y och positiva baser r och s .

Vi återkommer till detta när vi längre fram i kursen diskuterar exponentialfunktioner.

Kommentar om icke-positiva baser. För att kunna definiera potenser med reella exponenter generellt måste vi inskränka oss till positiva baser. Men i vissa specialfall kan vi tillåta icke-positiva tal i basen. För positiva heltalsexponenter n är uttrycket r^n definierat för alla reella tal r enligt Definition 1. För icke-positiva heltalsexponenter måste vi i kräva att $r \neq 0$ för att inte få noll i nämnaren och för att undvika uttrycket 0^0 (Definition 2 och 3).

För rationella exponenter p/q måste vi i allmänhet kräva att basen $r > 0$ för att $r^{p/q}$ ska gå att definiera på ett meningsfullt sätt (Definition 4). För vissa rationella exponeter kan vi dock också tillåta negativa baser. Exempelvis kan vi utan att råka i svårigheter definiera

$$(-r)^{1/3} \stackrel{\text{def}}{=} -(r^{1/3}), \quad r > 0, \quad (\text{Exempel: } (-8)^{1/3} = -2)$$

Detta har att göra med att $x^3 < 0$ om $x < 0$ och $x^3 > 0$ då $x > 0$; jämför med resonemanget ovan om hur $r^{1/2}$ ”borde” definieras, där det faktum att $x^2 \geq 0$ för alla x gjorde att vi bara kunde definiera $r^{1/2}$ för $r \geq 0$.

Uppgift 5.

$$\text{a) } (10)^2 \quad \text{b) } (-10)^2 \quad \text{c) } (100)^{1/2}$$

Uppgift 6.

$$\text{a) } (5)^3 \quad \text{b) } (-5)^3 \quad \text{c) } (125)^{1/3} \quad \text{d) } (-125)^{1/3}$$

Blandade Uppgifter

Uppgift 7. Förenkla

$$\text{a) } \frac{y^7}{y^6 + y^8} \quad \text{b) } \frac{(x^{1/2}x^{1/3})^6}{\sqrt[3]{x^{125}}} \quad \text{c) } \frac{t^{3/2}t^{2/3}}{t^{4/3}t^{3/4}}$$

Uppgift 8. Beräkna

$$\text{a) } \sqrt[5]{2^{10}} \cdot 16^{-1/2} \quad \text{b) } \frac{6^{1/2}}{3^{1/3} \cdot 2^{1/3}} \quad \text{c) } \left(-\frac{1}{27}\right)^{(-1/3)}$$

Uppgift 9. Är det sant att $(x^2 + x^4)^{1/2} = x + x^2$ för alla reella tal x ?