

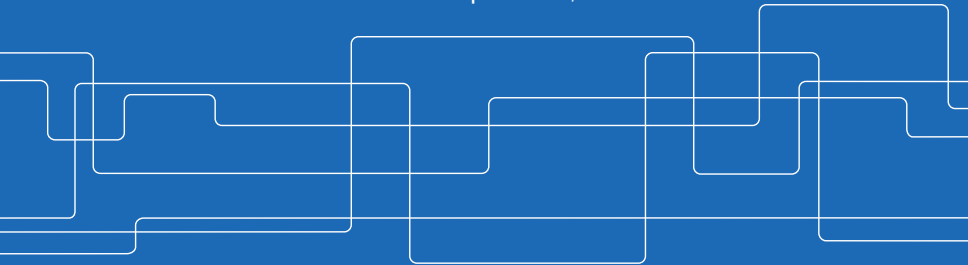


Föreläsning 2

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

1 september, 2016





Introduktion

Förra gången:

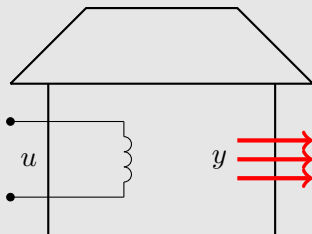
- Dynamiska system = Differentialekvationer
- Återkoppling

Dagens program:

- PID-reglering

Example (Temperaturreglering)

Hur reglerar vi temperaturen i ett hus?



$$v \begin{cases} y & = \text{temp. i huset} \\ u & = \text{tillförd effekt} \\ v & = \text{temp. utomhus} \\ r & = \text{önskad temp.} \end{cases}$$

Modell:

Betrakta en värmebalans:

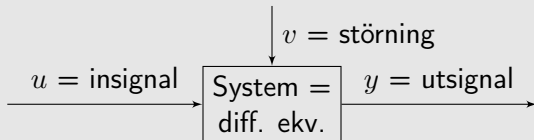
$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \text{tillförd effekt} - \text{bortförd effekt}$$

Example (Temperaturreglering, fort.)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} y(t) = \beta(u(t) - \alpha[y(t) - v(t)])$$

Förenkla genom att ta $\beta = 1$ (skalning).

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = u(t) + \alpha v(t)$$





Example (Temperaturreglering)

Antag att $r = 20^\circ\text{C}$. Hur ska vi välja $u(t)$?

Lösning:

I. Antag att $\alpha = 1$ och $v = 0$. Välj

$$u(t) = \begin{cases} 20, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{y} + y = 20, \quad y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = 20(1 - e^{-t}) \rightarrow 20, \quad t \rightarrow \infty$$

OK!



Problem med Öppen Styrning

Example (Temperaturreglering)

II. Välj $u(t)$ som i I men antag att $\alpha \neq 1$ och $v(0) = -10$.

$$\Rightarrow \dot{y} + \alpha y = 20 - 10\alpha, \quad y(0) = -10$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{20}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) - 10$$

$$\Rightarrow y(t) \rightarrow \frac{20}{\alpha} - 10, \quad \text{då } t \rightarrow \infty$$

Vilket ej är OK (Såvida inte $\alpha = 2/3$)!



Använd Återkoppling

Example (Temperaturreglering)

$$\begin{cases} y(t) & : \text{temp. inne} \\ u(t) & : \text{el-effekt} \\ v(t) & : \text{temp. ute} \end{cases} \implies \dot{y}(t) + \alpha y(t) = u(t) + \alpha v(t)$$

Mål: Att ha $r(t)$ grader inne.

Strategi:

Öka $u(t)$ ifall det är för kallt inne.

Minska $u(t)$ ifall det är för varmt inne.

Hur mycket?



P-reglering

Öka styrsignalen proportionellt mot storleken av felet!

$$u(t) = K[r(t) - y(t)] = Ke(t)$$

där $K > 0$ är en konstant.

Negativ återkoppling!

Jämför med en termostat (till/från, pulserande).



Example (Temperaturreglering, P-reglering)

Lösning:

$$\dot{y} + \alpha y = u + \alpha v$$

$$\Rightarrow \dot{y} + \alpha y = Kr - Ky + \alpha v$$

$$\Rightarrow \dot{y} + (\alpha + K)y = Kr + \alpha v$$

Sätt $r = 20$, $v = -10$ och $y(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \frac{K}{\alpha + K} \cdot 20 \cdot (1 - e^{-(\alpha+K)t}) + \\ &+ \frac{\alpha}{\alpha + K} \cdot (-10) \cdot (1 - e^{-(\alpha+K)t}) \end{aligned}$$



P-reglering

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

$$\Rightarrow y \rightarrow \frac{20}{1 + \frac{\alpha}{K}} - \frac{10}{1 + \frac{K}{\alpha}} \approx 20, t \rightarrow \infty$$

om K är stor, trots att $\alpha \neq 1$ och $v = -10$.

Bra, men

Stationärt fel: $u = Ke > 0$ krävs för att hålla rätt temperatur.

Kommentar:

Stationärt = "när det har svängt in sig"

Transient = "medan det svänger in sig"



Med återkoppling

- minskas inverkan av störningar och modellfel.
- ökar snabbheten vid insvängning (servo).
Här från $e^{-\alpha t}$ till $e^{-(\alpha+K)t}$.
- stabiliseras instabila system, t.ex. Segway

Vad kan gå fel?

- Systemet uppför sig inte som man tror
- Begränsningar i styrförmåga
- Återkoppling kan skapa instabilitet

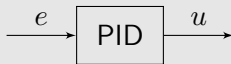


PID-reglering

PID (Proportionell Integrerande Deriverande) reglering löser större delen av alla reglerproblem.

Example

En processindustri har över 1000 PID-regulatorer.



Definition (PID-Regulatorn)

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

alt.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$



PID-regulatorn

Den har tre stycken "rattar" vi kan finjustera.

- **Proportionell återkoppling:** $Ke(t)$ betraktar felet just nu
- **Integrerande återkoppling:** $\frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$ betraktar hur felet *har* uppfört sig
- **Deriverande återkoppling:** $T_D \frac{de(t)}{dt}$ betraktar hur felet *kommer* att uppföra sig

Hur ska man ställa in K , T_I och T_D ?

⇒ LAB 1!



PI-reglering

PI-regulator: $u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right]$

Vi har vid ett stationärt tillstånd att $e(t) = 0$, annars ökar eller minskar $u(t)$ pga av integralen.

Insvängning: Antag att $u = \bar{u}$ krävs för $e(t) = 0$. Studera

$$\bar{u} = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right]$$

Deriverar vi detta uttryck får vi

$$K \left[\dot{e} + \frac{1}{T_I} e \right] = 0$$

$$\Rightarrow e(t) = C \cdot e^{-t/T_I}$$

Om T_I är liten får vi en snabbare insvängning mot referensvärdet.
(*Försämrar stabilitet!*)



Integratoruppvridding

Antag att vi har en högsta tillåten styrsignal u_{\max} , dvs.

$$u(t) \leq u_{\max}.$$

Om vi använder en PID-regulator och uppnår

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right] > u_{\max}$$

Example (Bil med husvagn i uppförsbacke!)



Integratoruppvridding

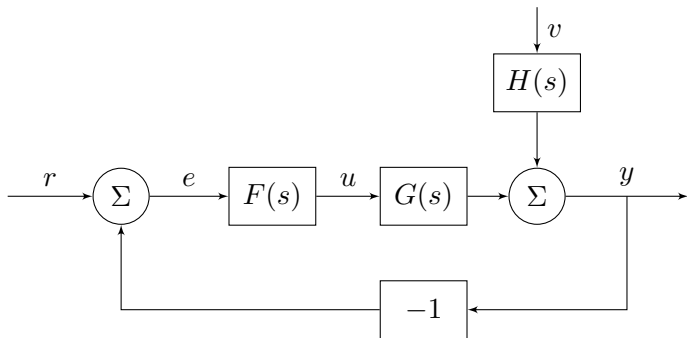
Integraldelen växer ($e(t) > 0$) trots att man inte kan ställa ut mer. När man väl har nått $e(t) = 0$, måste man ha ett negativt fel ($e(t) < 0$) så att integraldelen minskar till rätt värde.

Man löser detta genom att bara integrera när felet är litet (*anti-windup*).

- JAS 39 Gripen, 1993, Långholmen (YouTube)
- JAS 39 Gripen, 1989, Pilot Induced Oscillation. "Piloten för snabb P-reglering" <jmfr bilkörning, cykel>



Återkoppling mha Blockdiagram



$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}R(s) + \frac{H(s)}{1 + G(s)F(s)}V(s)$$



PI-Regering

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right]$$

$$U(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_I} \frac{1}{s} \right] E(s) \Rightarrow F(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{1}{s} \right)$$

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$$
$$Y(s) = \frac{K(1 + T_I s)}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} R(s)$$
$$+ \frac{\alpha T_I s}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} V(s)$$



Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

Stabilt? Poler i H.H.P.?

$$s^2 + (\alpha + K)s + K/T_I$$

Vi kan välja K och T_I så vi får godtyckliga poler i V.H.P.

Ex: Poler i -1 : $(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1 \Rightarrow$
 $K = (2 - \alpha)$ och $T_I = (2 - \alpha)$

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

Stationärt fel?

$$r(t) = 20 \Rightarrow R(s) = \frac{20}{s}, \quad v(t) = -10 \Rightarrow V(s) = \frac{-10}{s},$$

Slutvärdes-satsen

Antag stabilt (poler i V.H.P.). Då existerar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

$$Y(s) = \frac{K(1 + T_I s)}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} R(s) + \frac{\alpha T_I s}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} V(s)$$

vilket medför

$$sY(s) = \frac{K(1 + T_I s)}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} 20 + \frac{\alpha T_I s}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} (-10)$$

och

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 20 + 0$$

Inget stationärt fel oberoende av utomhustemperatur v !



Inverterad pendel

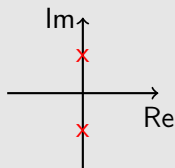
Example (Inverterad pendel, Segway)

Systemet har en överföringsfunktion på formen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

där l är längden av pendeln. Instabilt system (poler is $\pm\sqrt{g/l}$)!

P-reglering: Återkopplade systemets poler ges av $s^2 - g/l + K$



PI-reglering: Fungerar ej



Inverterad pendel

Example (Inverterad pendel, fort.)

PD-reglering:

Regulatorn ges av $F(s) = K[1 + T_D s]$ (hastighetsåterkoppling).

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K[1 + T_D s]}{s^2 - g/l + K + K T_D s}$$

Systemets poler fås av

$$s^2 + K T_D s + K - g/l = 0$$

Väljer vi till exempel

$$T_D = 2/K, \quad K = 1 + g/l$$

$$\implies (s + 1)^2 = 0$$

dvs. poler i -1. OK.



Inverterad pendel

D-verkan snabbar upp systemet och förbättrar stabiliteten.

Men för stort T_D ger motsatt verkan.

Gör vi en första ordningens Taylorutveckling av felet:

$$e(t + T_D) \approx e(t) + T_D \frac{d}{dt} e(t)$$

så kan vi tolka $T_D \approx$ prediktionshorisont.



Inverterad pendel

Antag att du bara kan observera pendeln vid längd $l_0 \leq l$

Instabilt nollställe i $g/(l - l_0)$

Svårare att reglera – testa!



Lab 1

Pröva själva hur man ställer in en PID-regulator!