Institutionen för Matematik

SF1625 Envariabelanalys
Läsåret 2016-2017
Lars Filipsson

Modul 1
Mål och Sammanfattning

1. Mål för modul 1

1. Reella tal.

- Känna till talsystememet och kunna använda notation för intervall av reella tal
- Känna till Supremumegenskapen

2. Funktioner.

- Förstå och använda funktionsbegreppet
- Förstå och använda begreppen definitionsmängd och värdemängd, samt graf
- Förstå och använda begreppen begränsad, udda, jämn (om funktioner)

3. Trigonometri, polynom, absolutbelopp.

- Räkna med $\sin$, $\cos$, $\tan$ och $\cot$ i radianer
- Använda enhetscirkeln och kunna kända vinklar
- Använda formler och lösa ekvationer
- Räkna med polynom, använda faktorsatsen
- Kunna linjens ekvation på olika former
- Räkna med absolutbelopp, definition och avståndstolkning

4. Gränsvärde.

- Förstå definitonen och dess roll.
- Använda räkneregler mm för att beräkna enklare gränsvärden

4. Kontinuitet.

- Förstå definitonen och dess roll.
- Känna till klassen av elementära funktioner
- Första och använda satser om kontinuerliga funktioner på kompakta intervall

2. Sammanfattning av modul 1

1. Intervall av reella tal. Den här kursen handlar om reellvärda funktioner av en reell variabel. Man kan tänka på de reella talen som decimaltal med en decimalutveckling som eventuellt är oändlig och hur komplicerad som helst. Bland de reella talen finns heltalen och de rationella talen (bråktalen), men också irrationella tal som $\sqrt{2}$, π och e. Man åskådliggör ibland de reella talen med en oändlig tallinje, där varje punkt motsvarar ett reellt tal. 0 kallas ofta origo. De funktioner vi studerar kommer för det mesta att vara definierade på intervall av reella tal. Det viktigt att man förstår och kan använda den notation som förekommer.

Till exempel betyder $[2, 3]$ intervallet som består av alla reella tal x som uppfyller att $2 \leq x \leq 3$. Detta intervall kallas **slutet** eftersom ändpunkterna är med i mängden. När ändpunkterna inte är med kallas intervallen **öppna**, t ex det intervall som består av alla reella tal x sådana att $1 < x < 5$. Detta betecknas ofta $(1, 5)$ (obs att den senare beteckningen också skulle kunna betyda koordinaterna för en punkt i xy-planet — när beteckningen används brukar det vara lätt att från sammanhanget förstå vilken betydelse som avses.)

Ibland används mängdklamrar för att beskriva mängder. Det sista intervallet ovan skulle med mängdklamrar kunna skrivas $\{x \in \mathbf{R} : 1 < x < 5\}$.

Med en **omgivning** till en punkt menar man ett öppet intervall som innehåller punkten.

Supremumegenskapen. De reella talen har en viktig egenskap: varje icke-tom uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns (supremum). Supremum kan, men måste inte, tillhöra mängden. Exempel: Om $M = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\}$, så är supremum av M talet $\sqrt{2}$. I detta fall tillhör supremum inte mängden. Poängen är att supremum finns. $\mathbf{Q}$, de rationella talen, har inte supremumegenskapen.

2. Funktioner. Med en funktion $f : A \to B$ menas en regel som till varje element $a \in A$ ordnar ett entydigt bestämt element $f(a) \in B$. Mängden A kallas **definitionsmängd** till funktionen. Mängden av alla de element $y \in B$ sådana att $y = f(x)$ för något $x \in A$ kallas **värdemängd** till funktionen. Värdemängden är alltså en delmängd till mängden B men behöver inte vara hela B.

De flesta av våra funktioner kommer att vara definierade på intervall av reella tal. Om man anger definitionsmängden explicit så är det den angivna mängden som är definitionsmängd, även om funktionen egentligen skulle kunna ha haft en större definitionsmängd.

Exempel: den funktion f som ges av $f(x) = x^2,\ x > 0$, har som definitionsmängd alla positiva reella tal.

Om man däremot inte anger definitionsmängden explicit så antas att definitionsmängden är den största mängd reella tal för vilken funktionsuttrycket är definierat och är ett reellt tal.

Exempel: den funktion h som ges av $h(x) = x^2$ har som definitionsmängd alla reella tal.

Observera att f och h ovan inte är samma funktion (de har ju olika definitionsmängd).

3. Ytterligare terminologi. Det finns några ytterligare termer som man måste kunna.

Man säger att en funktion f är **begränsad** om det finns ett tal C sådant att $|f(x)| \leq C$ för alla x i definitionsmängden.

Man säger att en funktion f är **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla x i definitionsmängden.

Man säger att en funktion f är **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla x i definitionsmängden.

Med **funktionsgrafen** till en funktion f menar man alla de punkter med koordinater (x, y) i planet sådana att $y = f(x)$.

Exempel. Funktionerna g och k som ges av $g(x) = \cos x$ och $k(x) = \sin x$ är båda begränsade (som konstanten C kan man i båda fallen ta talet 1). Funktionen g är jämn och funktionen k är udda. Observera dock att de flesta funktioner varken är jämna eller udda.

En viktig funktion är absolutbeloppsfunktionen, som skrivs $|x|$, och som användes i definitionen av begränsad funktion ovan. Absolutbeloppsfunktionen definieras

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Man kan kontrollera att $|x|$ mäter avståndet från punkten x till origo på reella linjen. På samma sätt kan $|a - b|$ tolkas som avståndet från punkten a till punkten b på tallinjen (se boken).

En stor klass av funktioner är de **elementära funktionerna.** Den klassen består av alla polynom, rationella funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner, inversa trigonometriska funktioner, samt alla kombinationer av sådana funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

Ett exempel på en elementär funktion är f som ges av

$$f(x) = \frac{43x^9 \sin x^5 - e^{4711x^2}}{\sqrt{1+x} + \ln(1 + \tan x)}.$$

Ett exempel på en funktion som inte är elementär är Heaviside-funktionen H som ges av

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Några anmärkningar. Med sammansättning av funktioner menar man $f \circ g(x) = f(g(x))$. Observera att absolutbeloppsfunktionen är en elementär funktion eftersom $|x| = \sqrt{x^2}$ för alla x.

4. Gränsvärde. Här är bara en kort uppräkning av det viktigaste, se boken för en fullständig genomgång. Observera att gränsvärdesdefinitionen är till för att slå fast vad begreppet gränsvärde betyder. Det är ingen räkneregel, utan just en definition. Oftast räknar man ut gränsvärden på andra sätt än genom att använda definitionen. Men definitionen talar om vad det är man i så fall har räknat ut, vad begreppet gränsvärde står för.

Definition. Att gränsvärdet av f när x går mot a är L, ofta skrivet $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, betyder:

för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ sådant att
$|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$.

Översatt till vanligt (och lite mer oprecist) språk: Att gränsvärdet av f när x går mot a är L, ofta skrivet $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, betyder:

vi kan få $f(x)$ hur nära L som helst bara genom att välja x tillräckligt nära a.

Sedan finns en motsvarande definition för gränsvärde när x går mot oändligheten också.

Räkneregler för gränsvärden. Gränsvärden följer några enkla regler (som kan bevisas med hjälp av definitionen, se boken). Nämligen, om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$, där L och M är reella tal, så gäller att:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = L - M$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = LM$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = L/M$ (om $M \neq 0$)

Vi har också den så kallade instängningslagen: om en funktion ligger mellan två funktioner som har samma gränsvärde i en punkt så måste den instängda funktionen också ha detta gränsvärde i punkten. För precis formulering, se boken. Med hjälp av denna kan man bevisa ett viktigt standardgränsvärde närmligen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Om man i gränsvärdesdefinitionen begränsar sig till x som ligger till höger om a talar man om gränsvärde när x går mot a från höger, skrivs $\lim_{x\to a^+} f(x)$. På samma sätt kan man titta på vad som händer när x går mot a från vänster, skrivs $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Observera att för att gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ ska existera så måste gränsvärdena från vänster och höger existera och de måste också vara lika. För Heaviside-funktionen är gränsvärdena från höger och vänster olika i origo.

Ibland talar man om gränsvärden som är oändliga och skriver $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Detta är i så fall ett så kallat oegentligt gränsvärde, dvs det är egentligen inget gränsvärde (eftersom oändligheten inte är ett tal), men det är ett praktiskt skrivsätt.

5. Kontinuitet. Här är bara en kort uppräkning av det viktigaste, se boken för en fullständig genomgång.

Definition. En funktion f är kontinuerlig i en punkt a om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

För att vara kontinuerlig i a ska alltså f ha ett funktionsvärde i punkten a, ha ett gränsvärde när x närmar sig a, och dessa båda ska dessutom vara lika.

En funktion som är kontinuerlig i alla punkter av sin definitionsmängd sägs vara en kontinuerlig funktion.

Heaviside-funktionen H ovan är inte en kontinuerlig funktion. Den är nämligen inte kontinuerlig i 0, som ju tillhör definitionsmängden (men den är kontinuerlig i alla andra andra punkter.)

Med hjälp av räknereglerna för gränsvärden och satsen som säger att sammansättningen av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig och med hjälp kontroller av polynomfunktioner, rationella funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner och inversa trigonometriska funktioner kan man bevisa följande sats:

Sats. De elementära funktionerna är kontinuerliga i alla punkter där de är definierade.

Med hjälp av bl a supremumegenskapen för de reella talen kan man visa följande viktiga satser om kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall.

Sats. En funktion som är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall antar både ett största och ett minsta värde.

Sats. En funktion som är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall antar alla mellanvärden, dvs: om funktionen antar två olika värden så måste funktionen också anta alla värden däremellan.

6. Polynom och Trigonometriska funktioner. I kapitel P finns avsnitt om polynom och trigonometriska funktioner. Detta har studerats både i gymnasiet och i introduktionskursen under mottagningsperioden och tas därför inte upp här. Men det förutsätts att man kan detta mycket bra. Den som har luckor behöver lägga ner extra tid på detta på egen hand. Särskilt när det gäller sinus, cosinus, tangens och cotangens så är det viktigt att man har mycket goda kunskaper om dessa funktioners egenskaper. Räta linjens ekvation på olika former är det också mycket viktigt att man kan bra. Missa inte enpunktsformeln (point/slope equation i boken). Den kommer att användas om och om igen i kursen! Fråga gärna assistenterna vid övningarna. Använd mattejouren.