KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Torsdagen den 18 augusti 2016

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Låt D vara det område ovanför x-axeln i xy-planet som begränsas av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ samt linjerna $y = -x$ och $y = \sqrt{3}x$. Beräkna x-koordinaten av masscentrum för D som ges av

$$\frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy}.$$

(4 p)

Bedömning:

- Korrekt omskrivning av dubbelintegralen till en upprepad integral, inklusive korrekt gränser, **1 poäng**
- Principiellt korrekt beräkning av upprepad integral, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av ena integralen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av x-koordinaten för masscentrum, **1 poäng**

---

(2) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C xy\,dx - y^2\,dy$$

där kurvan C är den medurs orienterade triangeln med hörnpunkter i $(0, 0)$, $(3, 0)$ och $(0, 4)$.

(4 p)

Bedömning: Med parametrisering

- Korrekt uppdelning av integralen i tre delar, **1 poäng**
- Korrekt parametrisering av delarna, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av en av enkelintegralerna, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning kurvintegralen, **1 poäng**

Med Greens formel

- Korrekt motivering till att Greens formel kan användas, **1 poäng**
- Korrekt omskrivning till dubbelintegral med hjälp av Greens formel, **1 poäng**
- Korrekt uppställd upprepad integration inklusive korrekta gränser, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen, **1 poäng**

---

(3) Låt $f(x, y) = e^{x-y} - x + y + xy$.

(a) Visa att origo är en kritisk punkt till funktionen f. **(2 p)**

(b) Är origo ett lokalt minimum, ett lokalt maximum eller ingetdera till funktionen f? **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräknade partiella derivator, **1 poäng**
- Korrekt slutförd motivering till att origo är en kritisk punkt, **1 poäng**

(b)
- Korrekt beräknat Taylorpolynom, **1 poäng**
- Korrekt slutförd motivering till att origo är ett lokalt minimum, **1 poäng**

(4) Låt $f(x, y) = xg(x + 2y)$ där g är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion. Visa att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(4 p)

Bedömning:

- Korrekt användning av kedjeregeln för att beräkna partialderivatorna av första ordningen, **1 poäng**
- Korrekt beräknade partialderivator av första ordningen, **1 poäng**
- Korrekt beräknade partialderivator av andra ordningen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd motivering till att likheten gäller för alla sådana funktioner g, **1 poäng**

(5) En kurva i planet parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t),$$

där $t \geq 0$.

(a) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ och farten $|\mathbf{r}'(t)|$ för $t \geq 0$. **(2 p)**

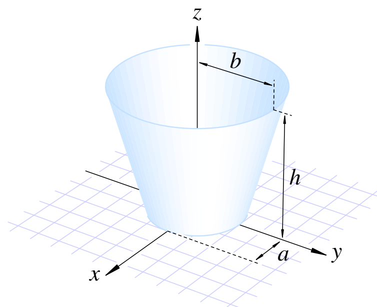
(b) Beräkna kurvans båglängd från punkten $\mathbf{r}(0)$ till punkten $\mathbf{r}(2)$. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräkning av hastigheten, **1 poäng**
- Korrekt beräknade farten, **1 poäng**

(b)
- Korrekt formel för beräkning av båglängden, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av båglängden, **1 poäng**

(6) En fylld vattentank har formen av en rak stympad cirkulär kon med undre radie a, övre radie b, där $b > a$, och höjd h, enligt figuren.



Den koniska delen S av tanken kan parametriseras genom

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{b-a}{h}s + a\right)\cos t \\ y = \left(\dfrac{b-a}{h}s + a\right)\sin t \\ z = s \end{cases}$$

där $0 \le s \le h$, $0 \le t < 2\pi$. Kraften som vattnet utövar på ytan S har z-komponent som ges av flödet av vektorfältet

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \rho g(h - z)(0, 0, 1) = (0, 0, \rho g(h - z))$$

ut genom ytan S, där ρ är vattnets densitet och g är tyngdaccelerationen. Beräkna denna kraftkomponent genom att beräkna flödesintegralen. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt anvädning av divergenssatsen, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av volymen, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av flödet genom cirkelskivorna, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av z-komponenten av kraft, **1 poäng**

---

(7) Visa att om x, y och z uppfyller att $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ och $x + 2y + 3z \le 3$ så måste $xyz \le 1/6$. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt hantering av inre kritiska punkter, **1 poäng**
- Korrekt uppställt villkor med hjälp av Lagranges metod, **1 poäng**
- Korrekt lösning av evkationssystem, **1 poäng**
- Korrekt slutförd motivering till varför olikheten gäller, **1 poäng**

---

(8) En kropp K i rummet ligger mellan planen $z = 0$ och $z = 1$. Dessutom vet vi att tvärsnittet av planet $z = a$ och kroppen utgör en cirkelskiva med radie a^2 för varje a i intervallet $0 \le a \le 1$.

(a) Skissera två olika sådana kroppar K. **(1 p)**

(b) Vet vi tillräckligt för att kunna bestämma volymen av K? I så fall, beräkna volymen, annars förklara vad som saknas. **(3 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt skisserade kroppar, **1 poäng**

(b)
- Korrekt motivering till att volymen är bestämd, **1 poäng**
- Korrekt uppställd integral för volymen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av volymen, **1 poäng**

---

(9) Låt **F** vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2, y + 1, z - 1)$$

och låt C_P vara en orienterad slät kurva som börjar i origo och slutar i punkten $P = (x_0, y_0, z_0)$. Bestäm den punkt P som ligger längst från origo och som uppfyller

$$\int_{C_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 9.$$

(4 p)

Bedömning:

- Korrekt potential, **1 poäng**
- Korrekt uppställt optimeringsproblem, **1 poäng**
- Korrekt använing av Lagranges metod, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av punkten P, **1 poäng**
