SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 2

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

31 augusti 2016

Att göra denna vecka

Översikt över modul 1

- Funktion
  - Definitionsmängd
  - Värdemängd
  - Udda, jämn
  - Begränsad
  - Absolutbelopp, Trigonometri, Polynom
- Gränsvärde
  - Precis definition
  - Räkneregler
  - Ett specialgränsvärde
- Kontinuitet
  - Precis definition
  - Satser om kontinuerliga funktioner
    - Min/Max
    - Mellanliggande värden

Previously on Envariabel.....

En **funktion** $f : A \to B$ är en regel som till varje objekt $a \in A$ ordnar ett entydigt bestämt objekt $f(a) \in B$. Mängden A kallas **definitionsmängd** till f. Mängden av alla funktionsvärden $f(x)$ i B kallas **värdemängd** till f.

Vi studerar främst reellvärda funktioner av en reell variabel.

Begrepp: **begränsad** funktion, **jämn** funktion, **udda** funktion, **funktionsgraf**.

VI har tränat lite på **trigonometri** och **polynom**. En introduktion har ni också sett på film. Obs: jag upprepar inte det jag har sagt i filmerna! Det förutsätts att alla kan detta bra. Vid problem fråga på övningarna eller använd mattejouren. Vi har tittat lite på hur man skriver intervall av reella tal.

Dagens meny

- Kort om Supremumegenskapen
- Arbete på Absolutbelopp
- Kort om Klassen av elementära funktioner
- Frågor på filmerna tills idag
- Gränsvärde

Registrera er så kan ni via er resultatsida se vilken seminariegrupp ni ska gå till på måndag (ej omreg)

Nytt för idag

Supremumegenskapen: Varje icke-tom uppåt begränsad mängd av reella tal har en **minsta övre gräns**, kallad supremum.

Supremum för en mängd är det minsta tal som är $\geq$ alla tal i mängden. Supremum kan, men måste inte, tillhöra mängden.

De rationella talen har inte denna egenskap.

Ex: Om $M = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\}$ så är $\sup M = \sqrt{2}$.

(Liknande för största undre gräns, infimum)

(sup och inf är betyg A-nivå)

Lite arbete

Absolutbeloppsfunktionen definieras genom

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{när } x \geq 0 \\ -x, & \text{när } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ mäter avståndet från punkten x till 0 på reella axeln och $|a - b|$ mäter avståndet från punkten a till punkten b.
Triangelolikheten: $|a + b| \leq |a| + |b|$ för alla a, b.

Uppgifter.

1. Skissa funktionsgrafen till $g(x) = |x - 1|$

2. Skriv funktionen $h(x) = |x + 2| - |x - 2|$ utan beloppstecken, som styckvis definierad funktion, och skissa dess graf

3. Markera på en tallinje mängden M given av
$M = \{x \in \mathbf{R} : \ |x - 3| < 2\}$

En viktig klass av funktioner

Klassen av **elementära funktioner** består av

alla polynom, rationella funktioner, trigonometriska funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, inversa trigonometriska funktioner

samt

alla kombinationer av sådana funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

Lite arbete

Vilka av nedanstående funktioner är elementära?

$$f(x) = \tan x + 2\sin 3x$$

$$g(x) = |x|$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \frac{x^9 \sin x^2 - e^{x^2}}{(\tan x + \ln x)^2}$$

Filmerna tills idag

Några frågetecken att räta ut:

Felritade grafen (x^2 då $x \geq 1$ och $2 - x$ då $x < 1$)

Är $x^4 - x^2 - 12$ jämnt delbart med $x - 2$?

$\cos(47\pi/3) = 1/2$

Varför är inte $g(x) = x + 1$ helt enkelt?

Varför går inte $1/x$ mot oändligheten?

Avgör om det finns något tal M sådant att

$$\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{1}{100}$$

för alla x sådana att $x > M$.

(Ange ett sådant tal M om det finns. Rita gärna en figur där du prickar in ditt M och visar vad det betyder.)

Gränsvärdesdefinitionen i ∞

På matematiska:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

betyder:

för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal M så att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x sådana att $x > M$.

Eller på ren svenska:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

betyder:

vi kan få funktionsvärdena $f(x)$ hur nära L som helst bara genom att välja x tillräckligt stort.

Gränsvärdesdefinitionen i en punkt

På matematiska:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

betyder:

för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \epsilon$ för alla x sådana att $0 < |x - a| < \delta$.

Eller på ren svenska:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

betyder:

vi kan få funktionsvärdena $f(x)$ hur nära L som helst bara genom att välja x tillräckligt nära a.

Gränsvärde

Syftet med definitionen är att tala om **vad begreppet** gränsvärde **betyder.**

Sedan använder vi definitionen för att **härleda räkneregler** för gränsvärden som gör det lättare att räkna på gränsvärden.

Man använder sällan definitionen för att räkna, men i svåra fall, **när inget annat hjälper**, måste vi använda den.

Gränsvärde

Reglerna som härleds med hjälp av definitionen är

1. Gränsvärdet av en summa

2. Gränsvärdet av en produkt

3. Gränsvärdet av en kvot

4. Instängningsregeln

Dessutom härleds vissa standardgränsvärden.

Gränsvärde

Gränsvärdesregler: Om vi vet att $f(x) \to L$ och $g(x) \to M$ då $x \to a$ så gäller att

$f(x) + g(x) \to L + M$ då $x \to a$

$f(x)g(x) \to LM$ då $x \to a$

$f(x)/g(x) \to L/M$ då $x \to a$ förutsatt att $M \neq 0$

Om $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ för x i en omgivning av a och dessutom $g(x)$ och $h(x)$ har samma gränsvärde när $x \to a$, så måste även $f(x)$ ha detta gränsvärde.

Gränsvärde

Ett viktigt standardgränsvärde:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Arbete

Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin 2t}{t}$$

Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

Kontinuitet

Definition: Funktionen f är **kontinuerlig** i punkten a om funktionen är definierad i a och har ett gränsvärde när $x \to a$ och

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(**På ren svenska:** gränsvärdet av $f(x)$ när x närmar sig a ska vara lika med f:s funktionsvärde i a)

Om ovanstående gäller alla punkter i definitionsmängden för f så sägs f vara en **kontinuerlig funktion.**

Faktum: De elementära funktionerna är kontinuerliga överallt där de är definierade.