SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 3

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

2 september 2016

Att göra

På föreläsningen idag

1. Kontinuitet
2. Elementära funktioner
3. Några viktiga satser
4. Problemlösning

På övningen idag

Uppgifter ur boken om kontinuitet

Sedan

har ni fram till måndag på er att förstå och skriva ner prydliga lösningar på seminarieuppgifterna! Egna lösningar!

Gå till rätt grupp och delta vid hela seminariet
Särskilt budskap till omregistrerade

Gränsvärde

Gränsvärde: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyder att vi kan få $f(x)$ hur nära L som helst bara genom att välja x tillräckligt nära a.

Räkneregler: Om $\lim_{x \to a} f(x) = L$ och $\lim_{x \to a} g(x) = M$ så gäller:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$
- $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = LM$
- $\lim_{x \to a} (f(x)/g(x)) = L/M$ (om $M \neq 0$)
- Instängningslagen

Höger- och vänstergränsvärde

Högergränsvärde: Om man i gränsvärdesdefinitionen begränsar sig till x som ligger till höger om a talar man om högergränsvärde, skrivet $\lim_{x \to a^+} f(x)$

Vänstergränsvärde: Om man i gränsvärdesdefinitionen begränsar sig till x som ligger till vänster om a talar man om vänstergränsvärde, skrivet $\lim_{x \to a^-} f(x)$

Krav för gränsvärde: För att gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ ska existera krävs att både höger- och vänstergränsvärdena existerar och är lika.

Gränsvärde i oändligheten och oändliga gränsvärden

Gränsvärde i oändligheten: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ betyder att vi kan få $f(x)$ hur nära L som helst bara genom att välja x tillräckligt stort.

Oändliga gränsvärden: Om man kan få $f(x)$ större än vilket tal som helst bara genom att välja x tillräckligt nära a så säger man att $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Detta är ett s k oegentligt gränsvärde, eftersom ∞ inte är ett tal.

(Motsvarande kan förstås göras för $-\infty$ också)

Kontinuitet

Kontinuitet: Om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ så sägs f vara kontinuerlig i a. Om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd sägs f vara en kontinuerlig funktion.

Sats: Sammansättningen av två kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Sats om största/minsta värde: Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ så antar f ett största och ett minsta värde när x varierar i $[a, b]$.

Sats om mellanliggande värden: Om f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$ och f antar värdet r och värdet s, så måste f också anta alla värden mellan r och s.

En viktig klass av funktioner

Klassen av **elementära funktioner** består av

alla polynom, rationella funktioner, trigonometriska funktioner, potensfunktioner, exponentialfunktioner, logaritmfunktioner, inversa trigonometriska funktioner

samt

alla kombinationer av sådana funktioner med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

Sats om elementära funktioner: De elementära funktionerna är kontinuerliga i alla punkter där de är definierade. (Bevisidé)

Uppgift 1 (dagens tentaproblem).

Visa att ekvationen $x^3 - 12x + 1 = 0$ har exakt tre olika lösningar i intervallet $[-4, 4]$.

Uppgift 2.

Förklara hur du kan veta att funktionen f som ges av

$$f(x) = \frac{\sin^3 x + \tan x}{x^5 + \cos x}$$

antar ett största och ett minsta värde när x varierar i $[0, 1]$.

(Hur blir det om x varierar i $(0, 1)$?)

Problemlösning

Moduluppgifter.

Finns på Kursstruktur -> Kursmoduler -> Modul 1

https://www.kth.se/social/files/55e5386bf27654447967b86d/Modul1.pdf