SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 4

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

5 september 2016

Att göra denna vecka

Översikt över modul 2 (seminarium 12 september)

- Derivata (2.1-2.7)
    - Definition av derivata
    - Derivatan av några grundläggande funktioner
    - Deriveringsregler
    - Derivata och kontinuitet
    - Linjär approximation
    - Högre ordningens derivator
    - Derivator i verkligheten
- Medelvärdessatsen (2.8)
    - Sats och bevis
    - Följdsatser
    - Derivata och växande/avtagande
- Implicit derivering (2.9)

Mål för modul 2

Det centrala målet för veckan: Man måste bli sjukt bra på att derivera och på att använda derivatan för linjär approximation och för att avgöra när funktioner är växande/avtagande

Derivata

Derivatans definition:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om detta gränsvärde existerar ändligt
(annars är f inte deriverbar i a).

Alternativ skrivning:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

om detta gränsvärde existerar ändligt
(annars är f inte deriverbar i a).

Derivata

Derivatan av några funktioner:

$$\frac{d}{dx}C = 0, \quad C \text{ konstant}$$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

Obs att $f(x) = |x|$ inte är deriverbar i origo.

Derivata

Sats. Om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a.

Deriveringsregler

Sats: Om f och g är deriverbara så gäller

$$\frac{d}{dx}kf(x) = kf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(produktregeln)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(kvotregeln, } g(x) \neq 0\text{)}$$

$$\frac{d}{dx}f((g(x)) = f'(g(x))g'(x) \quad \text{(kedjeregeln)}$$

Medeltillväxt och momentan tillväxt

Medeltillväxten (medelförändringen) av f på intervallet från a till $a+h$ är

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Den momentana tillväxten (förändringstakten) av f i punkten a är

$$f'(a)$$

förutsatt att f är deriverbar i a.

Exempel: medelhastighet och hastighet!

Tangent och linjär approximation

Tangent: Om f är deriverbar i a så har grafen $y = f(x)$ en tangentlinje i punkten $(a, f(a))$ med ekvation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Linjär approximation: Om f är deriverbar i a så kan derivatan användas för att approximation enligt

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{för } x \text{ nära } a.$$

Exempel.

Derivera med avseende på x och säg var funktionerna är deriverbara:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$
2. $g(x) = x \cos x$
3. $h(x) = x \sin(\cos x)$
4. $k(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

Exempel.

1. Finn en ekvation för tangenten till kurvan $y = x^3 + 1$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat -2.

2. Finn den linjära approximationen av $g(x) = \sqrt{x}$ när x ligger nära 1 och bestäm ett närmevärde till $\sqrt{1.2}$.

3. Finn den linjära approximationen av $h(x) = \sin x$ när x ligger nära 0 och bestäm ett närmevärde till $\sin \dfrac{1}{10}$

Högre ordningens derivator

Att derivera derivatan

Om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x)$ en funktion som talar om hur $f(x)$ förändras.

Om $f'(x)$ är deriverbar så är $f''(x)$ en funktion som talar om hur $f'(x)$ förändras.

Andraderivatan $f''(x)$ skrivs ibland också $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Och så vidare! Om f är n gånger deriverbar skrivs den n:te derivatan $f^{(n)}(x)$ eller $\dfrac{d^n f}{dx^n}$