Strategi för Lösning av Ex 43 Kapitel 1 i Pugh.

John Andersson johnan@kth.se

Problem: Visa att om $f(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ är kontinuerlig så är f likformigt kontinuerlig på $[a, b]$; d.v.s. för alla $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta_\epsilon > 0$ så att om

$$|x - y| < \delta_\epsilon \text{ så kommer } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Steg 0: Börja med att förstå skillnaden mellann kontinuerlig och likformigt kontinuerlig?

Steg 1: För ett givet $\epsilon > 0$ definiera

$$X = \big\{x \in [a, b];\ g.l.b.\{\delta_\epsilon(z)\} > 0;\ z \in [a, x]\big\},$$

där $\delta_\epsilon(x)$ är det δ_ϵ så att

$$|z - x| < \delta_\epsilon(z) \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \epsilon.$$

Hur vet vi att det för varje $z \in [a, b]$ och $\epsilon > 0$ existerar ett $\delta_\epsilon(z) > 0$?

Steg 2: Visa att $X \neq \emptyset$ och att X är begränsad från ovan. Dra slutsatsen att $c = l.u.b.(X)$ existerar.

Steg 3: Vi vill visa att $c = b$. Som ett första steg kan du visa att

$$|x - c| < \frac{\delta_{\epsilon/2}(c)}{2} \Rightarrow \delta_\epsilon(x) \geq \frac{\delta_{\epsilon/2}(c)}{2} > 0.$$

D.v.s. att om $|x - c| < \frac{\delta_{\epsilon/2}(c)}{2}$ så kommer, för alla $y \in [a, b]$,

$$|x - y| < \frac{\delta_{\epsilon/2}(c)}{2} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

LEDTRÅD: *Triangelolikheten säger att*

$$|f(x) - f(y)| = |(f(x) - f(c)) - (f(y) - f(c))| \leq |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)|.$$

Det räcker därför att visa att $|f(x) - f(c)| < \epsilon/2$ och $|f(y) - f(c)| < \epsilon/2$, vilket följer av från $|x - c| < \delta_{\epsilon/2}(c)$ respektive $|x - c| < \delta_{\epsilon/2}(c)$.

Steg 4: Visa att $c = b$ och drag slutsatsen att

$$\delta_\epsilon := g.l.b.\{\delta_\epsilon(z);\ z \in [a, b]\} > 0.$$

Steg 5: Se till att du förstår att steg 4 implicerar satsen vi försöker bevisa.