

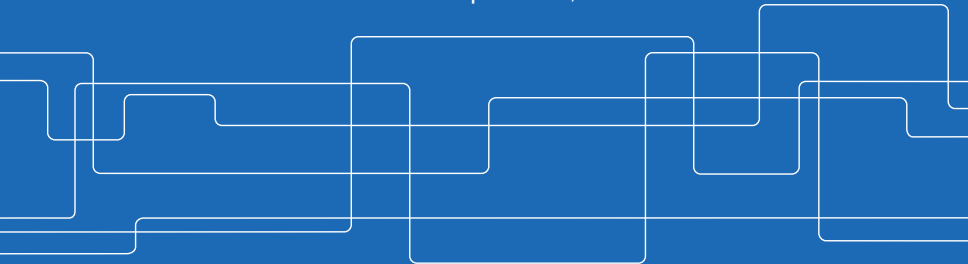


Föreläsning 4

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

8 september, 2016





Introduktion

Förra gången:

- Rotort
- Nyquistkriteriet

Dagens program:

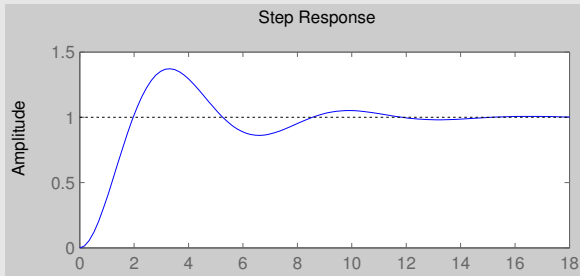
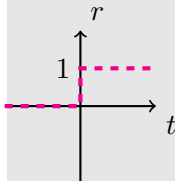
- Specifikationer
- Frekvenssvar
- Bodediagram

Objektiva prestandamått

1. Utsignalens förmåga att följa en given referenssignal (servo).

Example (Stegsvar)

Antag att ett steg ges i referenssignalen vid tiden $t = 0$. Härunder syns steget i referenssignalen samt svaret från ett system (som försöker följa steget):



Man kan mäta detta med hjälp av bland annat

- *Stigtiden*, $T_r = t_2 - t_1$ där

$$\begin{cases} y(t_2) = 0.9 \\ y(t_1) = 0.1 \end{cases}$$

- *Insvängningstiden*, T_s som defineras av att

$$1 - p \leq y(t) \leq 1 + p \quad \forall t \geq T_s$$

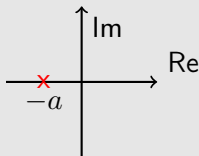
- *Överslängen*, $M = (y_{\max} - 1) \cdot 100\%$.

Example

Antag att

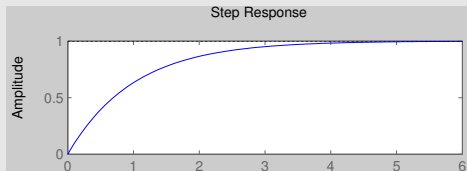
$$G_c(s) = \frac{a}{s + a}$$

Stegsvaret och polplaceringen syns i figurerna (för $a = 1$).



Dessa ger oss

$$\begin{cases} T_r &= \frac{2.2}{a} \\ T_s(5\%) &\approx \frac{3}{a} \\ M &= 0 \end{cases}$$





Objektiva prestandamått

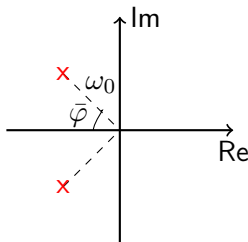
Skriver vi om ett systems överföringsfunktion på formen

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

kan vi definiera den *relativa dämpningen*, ξ , som

$$\xi \equiv \cos \bar{\varphi}$$

där vinkeln $\bar{\varphi}$ är definierad i figuren (Fig 2.6 i boken) nedan





Objektiva prestandamått

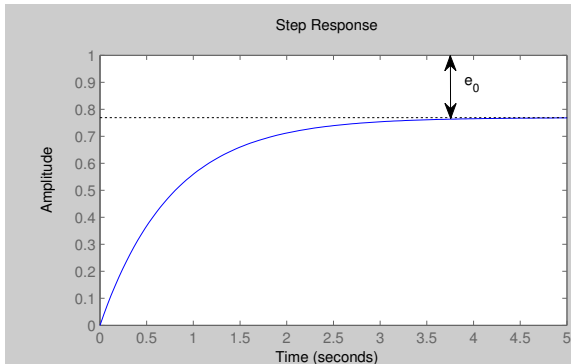
Då ges de ovannämnda prestandamått av

$$\begin{cases} T_r = \frac{\text{konstant}}{\omega_0} \\ T_s(5\%) \approx \frac{3}{\omega_0 \xi} \\ M = e^{\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \end{cases} \quad (\text{för små } \xi)$$

Se boken för härledningar.

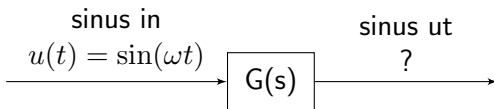
Viktigt vid rotorsanalys/-design. $\Leftrightarrow$ *Dominerande poler.*

2. Stationära fel



3. Andra mått som t.ex. störningsundertryckningar (regulatorproblemet).

Frekvenssvar - Stabilt System



$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{|G(i\omega)|}_{\text{förstärkning}} \cdot \sin \left[\omega t + \underbrace{\arg G(i\omega)}_{\text{fasvridning}} \right] + \text{transient (stabil)}$$

Frekvenssvaret ges av $G(i\omega)$.

Bevis genom faltningsräknande.



Bevis

Komplexa tal

$$z = x + iy = r[\cos(\phi) + i \sin(\phi)] = |z|e^{i \arg z}$$
$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \phi = \arctan(y/x)$$

Insignal $u(t) = \sin(\omega t) = \operatorname{Im} e^{i\omega t}$, från $t = -\infty$

Överföringsfkn $G(s) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau} d\tau$

Utsignal $y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Im} \int_0^\infty g(\tau)e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = \operatorname{Im} \int_0^\infty g(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau e^{i\omega t} \\ &= \operatorname{Im} G(i\omega)e^{i\omega t} = \operatorname{Im} |G(i\omega)|e^{i \arg G(i\omega) + i\omega t} \\ &= |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)) \end{aligned}$$



Example

Antag att $G(s) = s$ och att insignalen är $u(t) = \sin(\omega t)$.

$$\implies y(t) = \omega \cos(\omega t) = \omega \sin \left[\omega t + \frac{\pi}{2} \right]$$

Fasvrider: $+90^\circ$

Förstärker: Höga frekvenser mer än låga (med faktor ω)

Example

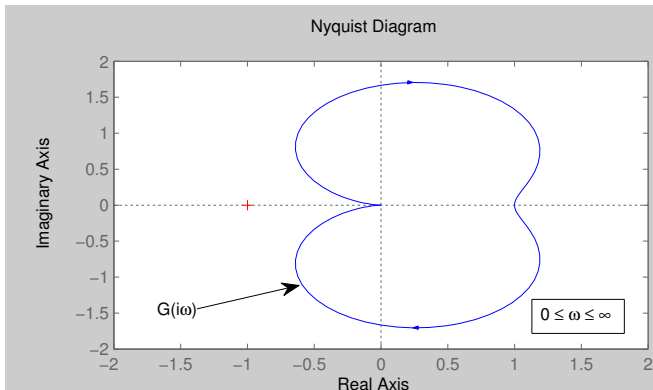
Antag att $G(s) = \frac{1}{s}$ och att insignalen är $u(t) = \sin(\omega t)$.

$$\implies y(t) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + \text{konstant} = \frac{1}{\omega} \sin \left[\omega t - \frac{\pi}{2} \right] + \text{konstant}$$

Fasvrider: -90°

Förstärker: Låga frekvenser mer än höga (med faktor $\frac{1}{\omega}$)

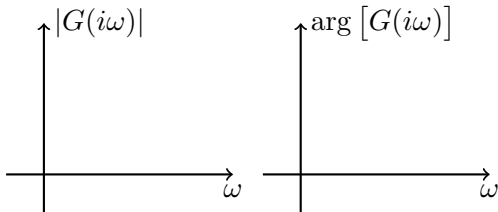
Nyquistdiagram:



Svårt att avläsa frekvens.

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

Bodediagram:



Två grafer med ω som variabel på den horisontella axeln och förstärkningen respektive fasvridningen på den vertikala.

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

Example

Antag att

$$G(s) = \frac{s+b}{s(s+a)} = \underbrace{\frac{b}{a}}_K \frac{1 + \frac{s}{b}}{s(1 + \frac{s}{a})}$$

då är frekvenssvaret givet av

$$G(i\omega) = \frac{K(1 + \frac{i\omega}{b})}{i\omega(1 + \frac{i\omega}{a})}$$

Example (fort.)

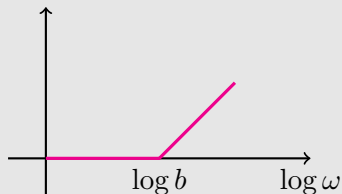
Amplitudkurva:

$$\log |G(i\omega)| = \log K + \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} - \log \omega - \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

Approximation:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} &= \frac{1}{2} \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2 \right] \approx \\ &\approx \begin{cases} 0, & \omega < b, \quad \omega \text{ liten} \\ \log \omega - \log b, & \omega \geq b, \quad \omega \text{ stor} \end{cases} \end{aligned}$$

Example (fort.)



Lutningen ökar med $+1 \approx 20$ dB/dekad.

Maximalt fel vid $\omega = b \Rightarrow \frac{1}{2} \log 2 = 0.15 = 3$ dB.



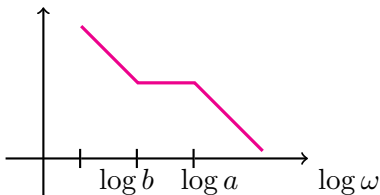
Approximativt Bodediagram

Vi hittar *brytpunkter* vid frekvenserna

$$\omega = b \quad \text{som ger lutning} \quad +1$$

$$\omega = a \quad \text{som ger lutning} \quad -1$$

Om ω liten är lutningen (antal integratorer) -1.





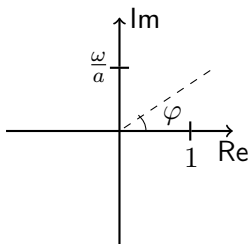
Approximativt Bodediagram

I praktiken ritas Bodediagram med hjälp av dator.

På övningarna är det enklast att beräkna exakta värden vid brytpunkterna och sen några till och interpolera.

Man brukar också rita en faskurva i Bodediagram.

$$\begin{aligned}\arg [G(i\omega)] &= \arg \left[\frac{1 + \frac{i\omega}{b}}{i\omega \left(1 + \frac{i\omega}{a}\right)} \right] = \\ &= \arg \left[1 + \frac{i\omega}{b} \right] - \arg[i\omega] - \arg \left[1 + \frac{i\omega}{a} \right]\end{aligned}$$



$$\varphi = \arctan \left[\frac{\omega}{a} \right]$$



Faskurva

$$\Rightarrow \arg [G(i\omega)] = \arctan \left(\frac{\omega}{b} \right) - 90^\circ - \arctan \left(\frac{\omega}{a} \right)$$

I praktiken ritas även faskurvan med hjälp av en dator.
På övningarna: se amplitudkurva.

OBS: För komplexa tal:

$$\log(G(i\omega)) = \log |G(i\omega)| + i \arg [G(i\omega)]$$



Arctan

Kom ihåg att:

- $\arctan(0) = 0^\circ$
- $\arctan(1) = 45^\circ$
- $\arctan(\infty) = 90^\circ$

Minnesregel:

Argumentet är k -värdet för en linje med lutning $\arctan k$.



Komplexa poler

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Vi kallar ξ för den *relativa dämpningen* och den antar värden i intervallet $0 < \xi < 1$.

Det finns många formler i boken.



Komplexa poler

Lutning:

$$\begin{cases} \omega \text{ liten} & 0 \\ \omega \text{ stor} & -2 \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \log |G(i\omega_0)| = \log \frac{1}{2\xi} \end{cases}$$

Liten dämpning $\Rightarrow$ Stor förstärkning av frekvenser nära ω_0 !

Rita noggrant!



lcke-minimumfastsystem

Jämför

$$\begin{aligned}G_1(s) &= \frac{1+s/b}{1+s/a} \\G_2(s) &= \frac{1-s/b}{1+s/a}\end{aligned}$$

De har samma amplitudkurva:

$$|G_1(i\omega)| = |G_2(i\omega)|$$

Faskurvorna skiljer sig dock:

$$\arg [G_1(i\omega)] = \arctan \frac{\omega}{b} - \arctan \frac{\omega}{a}$$

$$\arg [G_2(i\omega)] = -\arctan \frac{\omega}{b} - \arctan \frac{\omega}{a}$$

dvs.

$$\arg [G_2(i\omega)] < \arg [G_1(i\omega)]$$



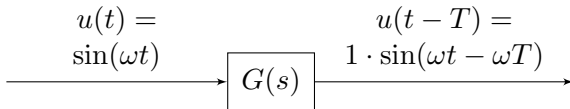
Icke-minimumfastsystem

$$\arg [G_2(i\omega)] < \arg [G_1(i\omega)]$$

$\Rightarrow G_2$ fasvrider mer (negativt) än G_1 !

Minimumfas = nollställen och poler i V.H.P.

Tidsfördröjning



$$\implies G(i\omega) = 1 \cdot e^{-i\omega T}$$

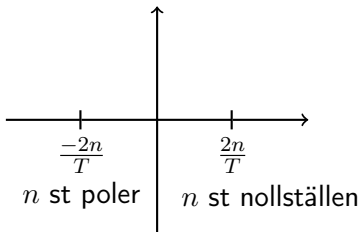
$$\implies G(s) = e^{-sT}$$

Vi ser att $|G(i\omega)| = 1$ och att $\arg [G(i\omega)] = -\omega T$.

Icke-minimumfas, jämför $G_1 = 1$.

Poler och nollställen

$$e^{-sT} = \left[\frac{e^{-\frac{sT}{2n}}}{e^{+\frac{sT}{2n}}} \right]^n \approx \frac{\left[1 - \frac{sT}{2n} \right]^n}{\left[1 + \frac{sT}{2n} \right]^n}$$





Bodes relation

Bodes relation ger en koppling mellan förstärkning och fas.

Theorem (Bodes relation)

Låt $G(s)$ vara minimumfas och $G(0) > 0$.

Om $|G(i\omega)|$ i ett visst frekvensområde avtar med

$$20\text{dB/dekad} \Rightarrow \arg [G(i\omega)] \approx -90^\circ$$

$$40\text{dB/dekad} \Rightarrow \arg [G(i\omega)] \approx -180^\circ$$

OSV.

För komplexa tal:

$$\log(G(i\omega)) = \log |G(i\omega)| + i \arg [G(i\omega)]$$