

SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 5

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

7 september 2016

Derivata:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(om gränsvärdet existerar)

Viktigt faktum: Om f är deriverbar i a , så är f kontinuerlig i a .

Viktigt exempel: Funktionen $|x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar i 0.

Tangent till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linjär approximation:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{för } x \text{ nära } a$$

Deriveringsregler

Om f och g är deriverbara så gäller

$$\frac{d}{dx}kf(x) = kf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{produktregeln})$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (\text{kvotregeln, } g(x) \neq 0)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \quad (\text{kedjeregeln})$$

- 1. Vanliga derivator.** Vi har tagit fram derivator till de enklaste av de elementära funktionerna.
 - 2. Deriveringsregler.** Vi har formulerat och bevisat deriveringsregler som vi nu måste bli bra på att använda.
 - 3. Beräkna derivator.** Med hjälp av punkt 1 och 2 ovan kan vi derivera "alla" elementära funktioner (där de är deriverbara).
 - 4. Tillämpa derivator.** Vi ska sedan använda derivator för att avgöra frågor om approximation, växande/avtagande, max/min mm.
- (Detta kommer vi att jobba med under ett par veckor till)

Några uppgifter om linjär approximation

1. Finn en ekvation för tangent och normal till kurvan $y = x^3 + 1$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat -2 .
2. Finn den linjära approximationen av $g(x) = \sqrt{x}$ när x ligger nära 1 och bestäm ett närmevärde till $\sqrt{1.2}$.
3. Finn den linjära approximationen av $h(x) = \sin x$ när x ligger nära 0 och bestäm ett närmevärde till $\sin \frac{1}{10}$.

Sats. Om f är definierad på ett öppet intervall (a, b) och antar sitt maximum (eller minimum) i en punkt c i (a, b) och $f'(c)$ existerar, så är $f'(c) = 0$.

Bevis. Se tavlan.

Definition. Punkter x sådana att $f'(x) = 0$ kallas **kritiska punkter** till f eller **stationära punkter** till f

Växande/avtagande funktioner

Definition. Anta att f är definierad på ett intervall I och att de punkter vi refererar till nedan ligger i I . Vi säger att:

f är **strängt växande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

f är **växande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

f är **strängt avtagande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

f är **avtagande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Följdsats 1. Om $f'(x) > 0$ för alla x i ett intervall I , så är f strängt växande i I .

Följdsats 2. Om $f'(x) < 0$ för alla x i ett intervall I , så är f strängt avtagande i I .

Följdsats 3. Om $f'(x) = 0$ för alla x i ett intervall I , så är f konstant i I .

Medelvärdessatsen med bevis

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis. Bilda funktionen

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Då gäller att $g(a) = g(b) = f(a)$. Då måste g anta ett största eller ett minsta värde i en punkt c sådan att $a < c < b$. Det följer av förra satsen att $g'(c) = 0$. Men

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Att detta är 0 var precis vad vi skulle bevisa.

Exempel på en strängt växande funktion

Exempel: Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt växande på hela reella axeln.

Uppgift 1. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^3 - 3x - 1$ strängt växande respektive strängt avtagande?

Uppgift 2. På vilka intervall är funktionen $g(t) = t - \sin t$ strängt växande respektive strängt avtagande?

Att derivera derivatan:

Om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x)$ en funktion som talar om hur $f(x)$ förändras.

Om $f'(x)$ är deriverbar så är $f''(x)$ en funktion som talar om hur $f'(x)$ förändras.

Andraderivatan $f''(x)$ skrivs ibland också $\frac{d^2f}{dx^2}$

Och så vidare! Om f är n gånger deriverbar skrivs den n :te derivatan $f^{(n)}(x)$ eller $\frac{d^nf}{dx^n}$