DD1350 Logik för dataloger

Fö 2 – Satslogik och Naturlig deduktion

Satslogik

- En **sats** (eller **utsaga)** är ett påstående som kan vara sant eller falskt.
- I **satslogik** (eng. *propositional logic*) representeras sådana satser av variabler (typiskt *p, q, r, p1, p2*, …)
  - jämför variabler av typ `boolean` i Java
- Vi skapar sammansatta satser med hjälp av **konnektiv** som ”och”, ”eller”, ”icke”, etc.
  - jämför `&&`, `||`, `!` i Java

Konnektiv

Konnektiv	Namn	Textuell form	Motsvarighet i Java
$\wedge$	Konjunktion	och	&&
$\vee$	Disjunktion	eller	||
$\neg$	Negation	inte	!
$\rightarrow$	Implikation	om…så	

Formler

Med hjälp av konnektiven kan vi bygga allt mer komplicerade formler:

q

$(\neg q)$

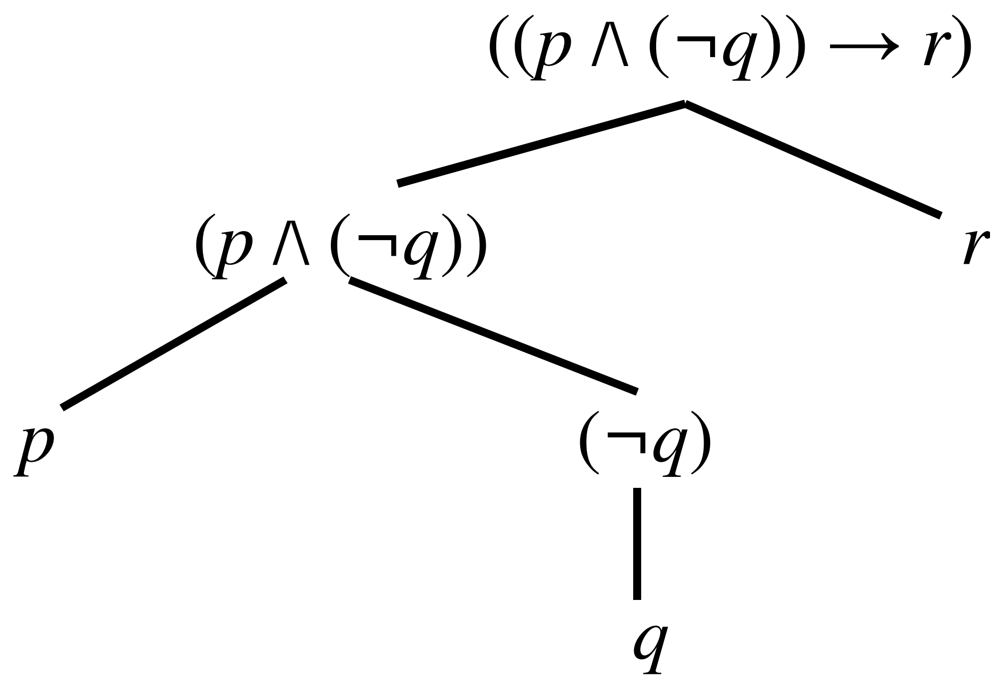
$(p \wedge (\neg q))$

$((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$

$(((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r) \vee s)$ osv.

För formell definition se Def 1.27 (s 32-33).

Syntaxträd



Prioriteter

Vi inför prioriteter mellan konnektiv för att minska antalet parenteser.

$\neg$ har högst prioritet

sedan kommer $\wedge$ och $\vee$

sedan kommer $\rightarrow$

dvs i stället för $(p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$ skriver vi $p \wedge \neg q \rightarrow r$

Formalisering

p : tåget kommer för sent

q : det finns en taxi vid stationen

r : John blir försenad till sitt möte

$\neg q$: det finns inte någon taxi vid stationen

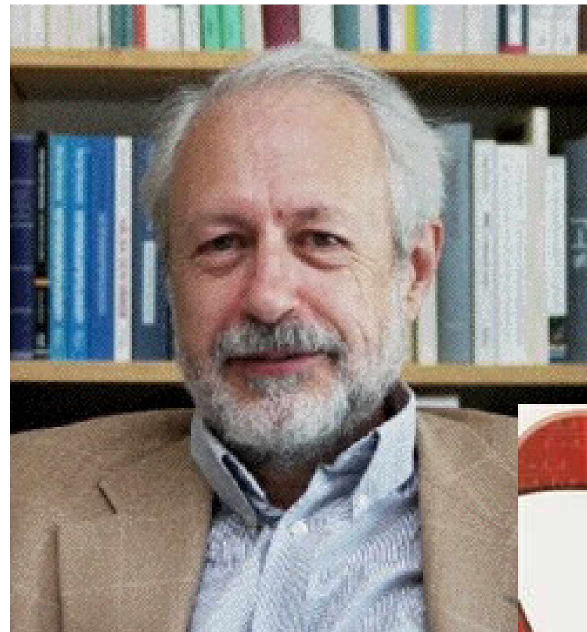
$p \land \neg q$: tåget kommer för sent och det finns inte någon taxi vid stationen

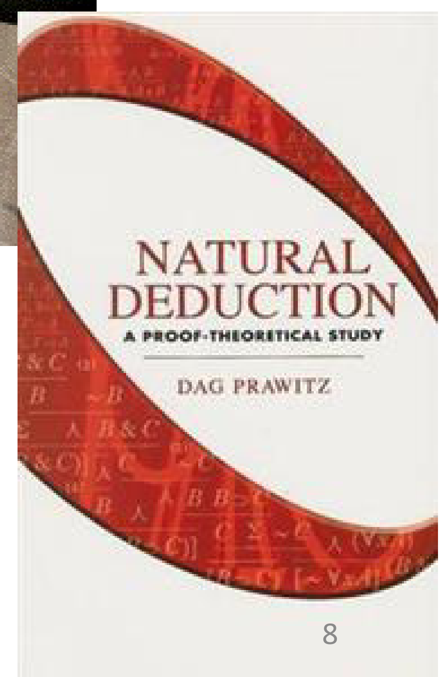
$p \land \neg q \to r$:

Om tåget kommer för sent och det inte finns någon taxi vid stationen, så blir John försenad till sitt möte.

Naturlig deduktion

- Naturlig deduktion är ett bevissystem som låter oss härleda nya formler (slutsatser) ur formler vi redan tror är sanna (premisser).
- Till stor del utvecklat av den svenske logikern Dag Prawitz (1936-)





Regler: konjunktion

Introduktion:

$$\frac{\varphi \qquad\qquad \psi}{\varphi \land \psi} \land i$$

Eliminering:

$$\frac{\varphi \land \psi}{\varphi} \land e_1 \qquad\qquad \frac{\varphi \land \psi}{\psi} \land e_2$$

Bevisexempel

Sekvent: $p \land q,\ r \vdash q \land r$

Bevis:

1	$p \land q$	premiss
2	q	$\land e_2$ 1
3	r	premiss
4	$q \land r$	$\land i$ 2, 3

Beviset som träd

premisser

$$\cfrac{\cfrac{p \wedge q}{q}\;\wedge\mathrm{e}_2 \qquad\qquad r}{q \wedge r}\;\wedge\mathrm{i}$$

slutsats

Regler: Implikations-eliminering

Kallas även ”modus ponens”.

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow e$$

Bevisexempel

Sekvent: $p \rightarrow (q \rightarrow r), \quad p \wedge q \quad \vdash \quad r$

Bevis:

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premiss
2	$p \wedge q$	premiss
3	p	$\wedge e_1$ 2
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 3, 1
5	q	$\wedge e_2$ 2
6	r	$\rightarrow e$ 5, 4

Regler: implikations-introduktion

Introduktion:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \\ \\ \psi\end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi} \;\rightarrow i$$

Antag φ (öppna en box), härled ψ, släpp antagandet φ (stäng boxen), dra slutsatsen $\varphi \rightarrow \psi$

Bevisexempel

Sekvent: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$

Bevis:

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premiss
2	$p \wedge q$	antagande
3	p	$\wedge e_1$ 2
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 3, 1
5	q	$\wedge e_2$ 2
6	r	$\rightarrow e$ 5, 4
7	$p \wedge q \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 2-6

Nästlade boxar

Sekvent: $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Bevis:

1	$p \wedge q \rightarrow r$	premiss
2	p	antagande
3	q	antagande
4	$p \wedge q$	$\wedge$i 2, 3
5	r	$\rightarrow$e 4, 1
6	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$i 3-5
7	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\rightarrow$i 2-6

Regler: copy

Sekvent: $\vdash \; p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Bevis:

1	p	antagande
2	q	antagande
3	p	copy 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow$i 2-3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow$i 1-4

Regler: dubbel negation

Introduktion:

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ \neg\neg i$$

Eliminering:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \neg\neg e$$

Motsägelse

- Om vi påstår att både φ och $\neg\varphi$ gäller har vi en **motsägelse**, och påståendet är falskt.
- Falskt (*falsum*) betecknas $\perp$
- Vi tolererar inte motsägelser i vår logik
  - Om vi kan härleda en motsägelse kan vi dra vilken slutsats som helst!
- Motsägelser är ändå användbara i hypotetiska resonemang (om antagandet φ leder till $\perp$, så drar vi slutsatsen $\neg\varphi$).

Regler: negation

Introduktion:

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \\ \\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ \neg i$$

Eliminering:

$$\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \neg e$$

Bevisexempel

Sekvent: $p \wedge \neg q \rightarrow r, \quad \neg r, \quad p \quad \vdash \quad q$

Bevis:

1	$p \wedge \neg q \rightarrow r$	premiss
2	$\neg r$	premiss
3	p	premiss
4	$\neg q$	antagande
5	$p \wedge \neg q$	$\wedge$i 3, 4
6	r	$\rightarrow e$ 5, 1
7	$\perp$	$\neg e$ 6, 2
8	$\neg \neg q$	$\neg i$ 4-7
9	q	$\neg \neg e$ 8

Regler: falsum

Eliminering:

$$\frac{\bot}{\varphi}\ \bot e$$

Regler: disjunktions-introduktion

Introduktion:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \; \vee i_1 \qquad\qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \; \vee i_2$$

Regler: disjunktions-eliminering

Eliminering:

$$\frac{\varphi \lor \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \\ \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \\ \\ \chi\end{array}}}{\chi} \; \lor e$$

Bevisexempel

Sekvent: $p \vee q, \quad \neg p \quad \vdash \quad q$

Bevis:

1	$p \vee q$	premiss
2	$\neg p$	premiss
3	p	antagande
4	$\bot$	$\neg e$ 3, 2
5	q	$\bot e$ 4
6	q	antagande
7	q	copy 6
8	q	$\vee e$ 1, 3-5, 6-7

Bevisbarhet

Om vi kan bevisa ψ utifrån premisserna $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ så skriver vi detta som:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Uttrycket ovan kallas en **sekvent**.

Ifall det inte är uppenbart vilket bevissystem som avses, så kan vi lägga till ett subscript, t.ex. $\vdash_{ND}$

Bevis i naturlig deduktion, sammanfattning

Ett **bevis** till en sekvent är en sekvens av formler, där

- varje formel antingen är:
  - en **premiss** i sekventen, eller
  - ett **tillfälligt antagande** (öppnar en box) ,eller
  - resultatet av användningen av någon regel till formler som:
    - kommer tidigare i sekvensen, och
    - inte förekommer i någon redan stängd box
- alla antaganden är släppta (alla boxar stängda), och
- sista formeln är sekventens slutsats.

Härledda regler

Alla sekventer vi bevisar kan användas som bevisregler.

T.ex bevisade vi just $p \lor q, \neg p \quad \vdash \quad q$

Detta kan uttryckas som en bevisregel (sk “disjunktiv syllogism”):

$$\frac{p \lor q \qquad \neg p}{q}$$

(Om inte annat sägs i uppgiften, använd enbart reglerna på sid 27 i boken).

Sambandet mellan $\vdash$ och $\rightarrow$

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ldots, \ \varphi_n \ \vdash \ \psi$$

om och endast om

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots))$$

1	φ_1	Premiss
	$\ldots$	
n	φ_n	Premiss
	$\ldots$	
i	ψ	

1	φ_1	Antagande
	$\ldots$	
n	φ_n	Antagande
	$\ldots$	
j	ψ	
j+1	$\varphi_n \rightarrow \psi$	
	$\ldots$	
j+n	$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \psi) \ldots))$	