SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 5

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

7 september 2016

Hur mycket behöver man jobba?

Vi har ett gemensamt ansvar:

Jag visar vad som behöver göras
Men det är ni som måste göra det

Viktigt faktum:

Det finns hur många omgasquer som helst
Men bara en chans att klara kursen medan den pågår

Det här måste man göra:

Förbered föreläsning genom film+frågor
Efter föreläsning: moduluppgifter + ev läsning
Uppgifter i boken på och efter övningarna (räkna själva!)
Klara seminarierna med god marginal

Derivata:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(om gränsvärdet existerar)

Viktigt faktum: Om f är deriverbar i a, så är f kontinuerlig i a.

Viktigt exempel: Funktionen $|x|$ är kontinuerlig men inte deriverbar i 0.

Tangent till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linjär approximation:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

Deriveringsregler

Om f och g är deriverbara så gäller

$$\frac{d}{dx}kf(x) = kf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(produktregeln)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{(kvotregeln, } g(x) \neq 0\text{)}$$

$$\frac{d}{dx}f((g(x)) = f'(g(x))g'(x) \qquad \text{(kedjeregeln)}$$

Program

1. Vanliga derivator. Vi har tagit fram derivator till de enklaste av de elementära funktionerna.

2. Deriveringsregler. Vi har formulerat och bevisat deriveringsregler som vi nu måste bli bra på att använda.

3. Beräkna derivator. Med hjälp av punkt 1 och 2 ovan kan vi derivera ”alla” elementära funktioner (där de är deriverbara).

4. Tillämpa derivator. Vi ska sedan använda derivator för att avgöra frågor om approximation, växande/avtagande, max/min mm.

(Detta kommer vi att jobba med under ett par veckor till)

Några uppgifter om linjär approximation

1. Finn en ekvation för tangenten till kurvan $y = x^3 + 1$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat -2. (2 min)

2. Finn den linjära approximationen av $g(x) = \sqrt{x}$ när x ligger nära 1 och bestäm ett närmevärde till $\sqrt{1.2}$. (3 min)

3. Finn den linjära approximationen av $h(x) = \sin x$ när x ligger nära 0 och bestäm ett närmevärde till $\sin \dfrac{1}{10}$. (3 min)

En viktig sats

Sats. Om f är definierad på ett öppet intervall (a, b) och antar sitt maximum (eller minimum) i en punkt c i (a, b) och $f'(c)$ existerar, så är $f'(c) = 0$.

Bevis. Se tavlan.

Definition. Punkter x sådana att $f'(x) = 0$ kallas **kritiska punkter** till f eler **stationära punkter** till f

Växande/avtagande funktioner

Definition. Anta att f är definierad på ett intervall I och att de punkter vi refererar till nedan ligger i I . Vi säger att:

f är **strängt växande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

f är **växande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$

f är **strängt avtagande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

f är **avtagande** på I om $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$

Varför använder vi inte derivata för att definiera vad vi menar med (strängt) växande och avtagande?

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Följdsats 1. Om $f'(x) > 0$ för alla x i ett intervall I, så är f strängt växande i I.

Följdsats 2. Om $f'(x) < 0$ för alla x i ett intervall I, så är f strängt avtagande i I.

Följdsats 3. Om $f'(x) = 0$ för alla x i ett intervall I, så är f konstant i I.

En konkret tolkning av medelvärdessatsen

Exempel. Om man kör 100 km på 2 timmar så har man vid någon tidpunkt hållit hastigheten 50 km/h

Medelvärdessatsen med bevis

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bevis. Bilda funktionen

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Då gäller att $g(a) = g(b) = f(a)$. Då måste g anta ett största eller ett minsta värde i en punkt c sådan att $a < c < b$. Det följer av förra satsen att $g'(c) = 0$. Men

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Att detta är 0 var precis vad vi skulle bevisa.

Exempel 1: Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt växande på hela reella axeln. (Dvs att derivatan är noll i enstaka punkter gör ingenting, om den är positiv i alla andra punkter)

Exempel 2: Funktionen $g(x) = \sqrt{x(2-x)}$ är strängt växande på $[0, 1]$ och strängt avtagande på $[1, 2]$. (Dvs för kontinuerliga funktioner sprider sig växandet/avtagandet till intervallets ändpunkter)

Några uppgifter

Uppgift 1. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^3 - 3x - 1$ strängt växande respektive strängt avtagande? (3 min)

Uppgift 2. På vilka intervall är funktionen $g(t) = t - \sin t$ strängt växande respektive strängt avtagande? (3 min)

Högre ordningens derivator

Att derivera derivatan:

Om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x)$ en funktion som talar om hur $f(x)$ förändras.

Om $f'(x)$ är deriverbar så är $f''(x)$ en funktion som talar om hur $f'(x)$ förändras.

Andraderivatan $f''(x)$ skrivs ibland också $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Och så vidare! Om f är n gånger deriverbar skrivs den n:te derivatan $f^{(n)}(x)$ eller $\dfrac{d^n f}{dx^n}$