Föreläsning 5
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

9 september, 2016

Introduktion

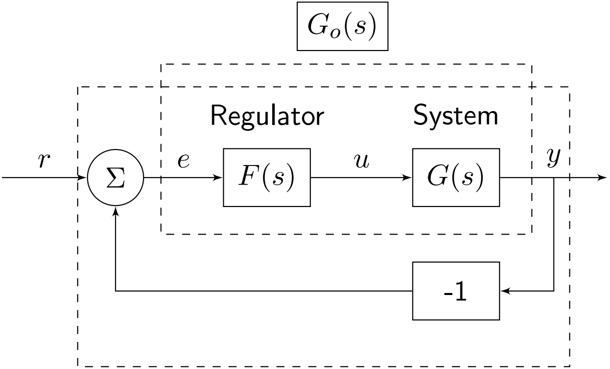
Förra gången:

- Frekvenssvar
- Bodediagram

Dagens program:

- Regulatorkonstuktion

Regulatorkonstruktion



$$\boxed{G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}}$$

Regulatorkonstruktion

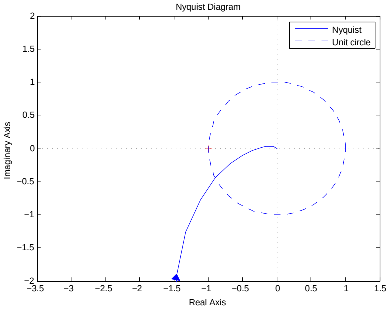
Hur används **kretsförstärkningen** $G_o(i\omega) = G(s)F(s)$ för att bedöma egenskaper hos **slutna systemet** $G_c(s)$?

- Stabilitet
- Snabbhet och svängighet
- Stationära fel

Observera att vi kan ändra $G_o(i\omega)$ med hjälp av regulatorn $F(s)$!

Stabilitet: Nyquistkriteriet

Antag att $G_o(s)$ är stabil (poler i $s = 0$ är OK) $\Longrightarrow$
$G_c(s)$ stabil om Nyquistkurvan till $G_o(s)$ **ej** omsluter -1.

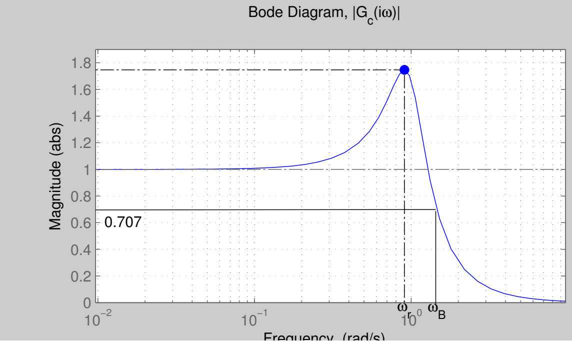


Mål

Utsignalen skall följa referenssignalen (servo)

$$y(t) \approx r(t) \quad \Rightarrow \quad G_c(i\omega) \approx 1$$

Typiskt utseende på $|G_c(i\omega)|$:



Snabbhet och svängighet

Från bilden på förra sidan har vi storheterna:

- **Bandbredd:** $|G_c(i\omega_B)| = 1/\sqrt{2}$: $\omega_B \approx$ snabbhet (jämför T_r)
- **Resonansfrekvens:** ω_r
- **Resonanstopp:** $|G_c(i\omega_r)| = M_p \approx$ översläng
- **Stationärt fel:** $e_0 = 1 - G_c(0)$

Man önskar sig att

$$\begin{cases} \omega_B & \text{stor} \\ M_p & \text{liten} \\ e_0 & = 0 \end{cases}$$

Snabbhet och svängighet

Koppling mellan kretsförstärkningen $G_o(i\omega)$ och slutna systemet $G_c(i\omega)$:

$$G_c(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1 + G_o(i\omega)} \Longleftrightarrow G_o(i\omega) = \frac{G_c(i\omega)}{1 - G_c(i\omega)}$$

Vi ser att om

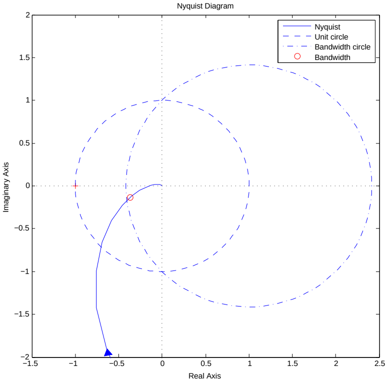
$$G_c(i\omega) \approx 1 \Longleftrightarrow G_o(i\omega) \text{ stor}$$

$$G_c(i\omega) \text{ liten} \Longleftrightarrow G_o(i\omega) \text{ liten}$$

Krav på kretsförstärkningen $G_o(i\omega)$

Bandbredd: $|G_c(i\omega)| \leq 1/\sqrt{2}$ för alla $\omega \geq \omega_B \Leftrightarrow$

$$|G_o(i\omega) - 1| \leq \sqrt{2} \text{ för alla } \omega \geq \omega_B$$

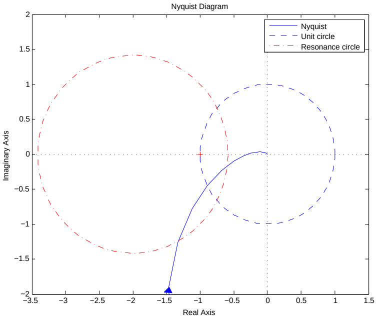


Krav på kretsförstärkningen $G_o(i\omega)$

Resonanstopp 3dB: $|G_c(i\omega)| \leq \sqrt{2}$ för alla $\omega \Leftrightarrow$

$$\sqrt{2} \leq |G_o(i\omega) + 2| \text{ för alla } \omega$$

(Inte uppfyllt här!)



Bevis : Möbius transformation

Konform avbildning (avbildar cirklar på cirklar)

Avbildar öppna systemet på sluta systemet: $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$

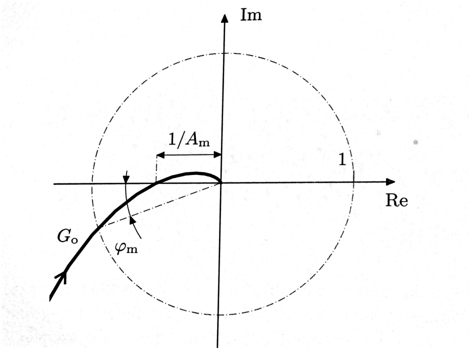
Bandbredd: $\left|\dfrac{z}{1+z}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| \leq \sqrt{2}$

Bevis: $z = x + iy \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 0.5[(1+x)^2 + y^2] \Leftrightarrow$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 2$

Resonanstopp 3dB: $\left|\dfrac{z}{1+z}\right| \leq \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \leq |z+2|$

Krav på kretsförstärkningen $G_o(i\omega)$

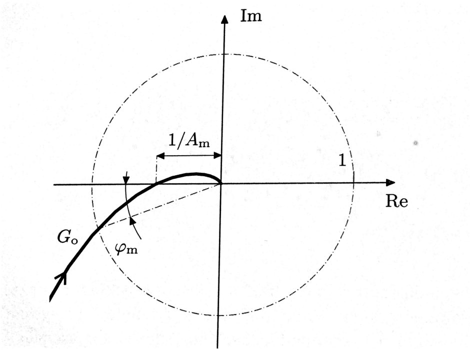
Vi kommer att använda följande storheter och motsvarande frekvenser från Nyquistkurvan $G_o(i\omega)$ för att avgöra snabbhet och svängighet



Nyquistkurvan

- *Skärfrekvensen* (Crossover frequency, ω_c) ges av att $|G_o(i\omega_c)| = 1$.
- *Phase-crossover frequency* (ω_p) ges av att $\arg\left[G_o(i\omega_p)\right] = -180°$.
- *Fasmarginalen* (φ_m) ges av $\varphi_m = \arg\left[G_o(i\omega_c)\right] - (-180°)$.
- *Amplitudmarginalen* (A_m) ges av att $A_m = \frac{1}{|G_o(i\omega_p)|}$.

Nyquist-kriteriet



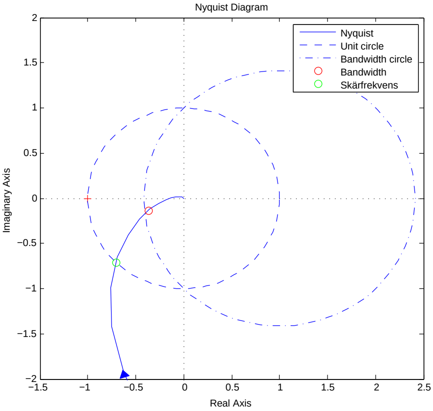
För *snälla system* har man ett stabilitetskrav att

$$\begin{cases} \varphi_m & > 0 \\ A_m & > 1 \end{cases}$$

Koppling mellan bandbredd och skärfrekvens

Tumregel: $\boxed{\omega_B \approx \omega_c}$

(Här $\omega_B > \omega_c$)



Koppling mellan Resonanstopp och Fasmarginal

Resonanstopp:

$$M_p \geq |G_c(i\omega_c)| = \frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)}$$

Om fasmarginalen φ_m är liten (A_m nära 1)

$$\Longrightarrow G_c(i\omega_c) \approx \frac{-1}{1-1}$$

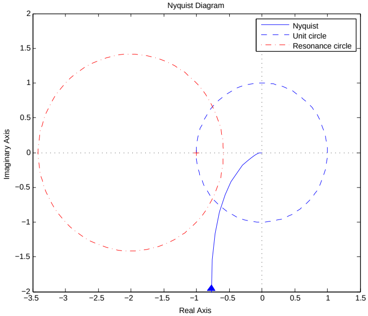
$\Rightarrow M_p$ stor $\Rightarrow$ stor översläng

Krav på Fasmarginalen

Resonanstopp 3dB:

$$\frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)} \leq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_m \geq 41^o$$

OK här!



Snabbhet och svängighet

Krav på snabbhet och dämpning ger krav på ω_c, φ_m och A_m.

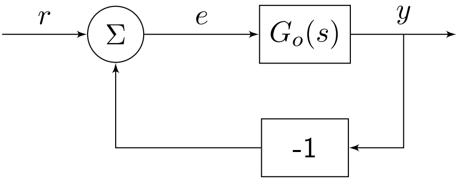
Sammanfattning: Det är *enklare* att göra regulatorkonstruktion genom att modifiera kretsförstärkningen

$$G_o = FG$$

än på det slutna systemet

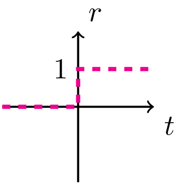
$$G_c = \frac{FG}{1 + FG}$$

Stationära fel



$$\boxed{E(s) = \frac{1}{1+G_o(s)} R(s)}$$

Låt $r(t)$ vara ett enhetssteg.



Då är $R(s) = \frac{1}{s}$.

Stationära fel

Använder vi *slutvärdesteoremet* (Obs. att vi måste ha ett stabilt system!)

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s}{1 + G_o(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G_o(0)}$$

ser vi att

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \text{ om } G_o(0) = \infty$$

dvs. att det stationära felet är noll om $G_o(s)$ innehåller minst en integrator.

Kompensering

Bestäm regulator $F(s)$ utifrån krav på

I. snabbhet $\Rightarrow$ Krav på ω_c

II. dämpning $\Rightarrow$ Krav på φ_m

III. stationärt fel $\Rightarrow$ Krav på $|G_o(0)|$

Kompensering

I. Snabbhet

Det räcker med en P-regulator

$$F(s) = K$$

Detta flyttar amplitudkurvan (uppåt eller nedåt), men ändrar ej faskurvan.

Fixar skärfrekvens ω_c!

Kompensering

II. Dämpning

Använd en PD-regulator ($\beta = 0$) formulerad med hjälp av en *lead-länk*:

$$F_{\mathsf{lead}}(s) = \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

Fixar fasmarginal φ_m!

Kompensering

III. Stationärt fel

Använd en PI-regulator ($\gamma = 0$) formulerad med hjälp av en *lag-länk*:

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Fixar stationärt fel, men kan förstöra fasmarginalen!

Kompensering

I + II + III. Sammantagen regulator

Den fullständiga regulatorn ges av:

$$F(s) = K \cdot F_{\text{lead}}(s) \cdot F_{\text{lag}}(s) = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \cdot \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Hur ska vi bestämma τ_D, τ_I, β, K och γ?

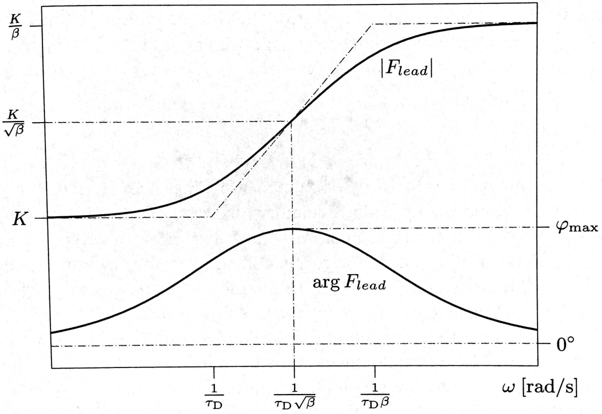
Kompensering

Några observationer:

- $\arg\left[F_{\text{lead}}(i\omega)\right] > 0^\circ \ \forall \ \omega$ lyfter fasen $\Rightarrow$ Bättre φ_m.
- $\arg\left[F_{\text{lead}}(i\omega)\right]$ maximal för $\omega = \frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$ med maxvärde $\arctan\left[\frac{1}{2}\frac{1-\beta}{\sqrt{\beta}}\right]$ som går mot 90° när $\beta \to 0$.
- $\left|F_{\text{lead}}\left(i\frac{1}{\tau_D\beta}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$
- $|F_{\text{lead}}(i\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \text{ liten} \\ \frac{1}{\beta} & \omega \text{ stor} \end{cases}$

Se figur 5.14 på sida 107.

Lead



$\frac{K}{\beta}$
$\frac{K}{\sqrt{\beta}}$
K
$|F_{lead}|$
$\varphi_{\max}$
$\arg F_{lead}$
$0°$
$\frac{1}{\tau_D}$
$\frac{1}{\tau_D\sqrt{\beta}}$
$\frac{1}{\tau_D\beta}$
ω [rad/s]

Kompensering

Arbetsgång

1. Bestäm önskad $\omega_B \rightarrow \omega_c$
2. Bestäm önskad $\varphi_m \overset{(45^\circ - 60^\circ)}{\longrightarrow}$ Nödvändig fasökning vid ω_c
3. Bestäm β från diagram (eller räkna ut)
4. $\omega_c = \frac{1}{\tau_D \sqrt{\beta}} \Rightarrow \tau_D = \frac{1}{\sqrt{\beta} \cdot \omega_c}$
5. Välj K så att $|G(i\omega_c)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot K = 1$, dvs. $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|}$

OBS. Behövs en stor fasökning; använd flera länkar i serie.

Kompensering

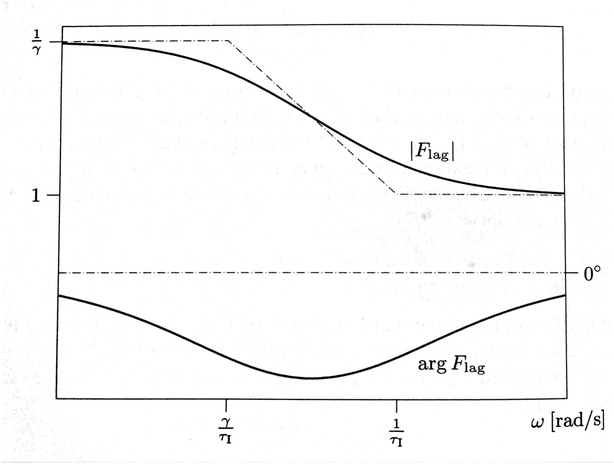
III. PI / lag-länk

$$F_{\mathsf{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

- $F_{\mathsf{lag}}(0) = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma$ liten $\Rightarrow |G_o(0)|$ stor $\Rightarrow$ små stationära fel
- $\arg F_{\mathsf{lag}}(i\omega) < 0 \;\; \forall\, \omega$ försämrar φ_m

Se figur 5.15 på sida 108 i boken.

Lag



$\frac{1}{\gamma}$
$|F_{\mathrm{lag}}|$
1
0°
$\arg F_{\mathrm{lag}}$
$\frac{\gamma}{\tau_{\mathrm{I}}}$
$\frac{1}{\tau_{\mathrm{I}}}$
ω [rad/s]

Kompensering

Arbetsgång för PI/lag-länk

- Specificera $e_0 \Rightarrow$ Beräkna γ
- Försök med $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} \Rightarrow \arg F_{\text{lag}}(i\omega_c) \geq 5.7^\circ$ dvs. liten påverkan på φ_m. Lägg till extra 5.7° med hjälp av F_{lead}
- Om felet avtar för långsamt $\Rightarrow$ minska τ_I och kompensera eventuell försämring av φ_m med F_{lead}