SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 6

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

9 september 2016

Användning av derivata

Vanliga tillämpningar av derivata:

- Approximation
- Växande/Avtagande
- Max/Min
- Ekvationslösning
- Gränsvärden
- Förändringstakt, speciellt (men inte bara) hastighet

1. Approximation.

Verktyg: Formeln för linjär approximation säger att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

Uppgift: Skriv upp den linjära approximationen för $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ kring punkten $x = 25$ och använd den för att hitta ett närmevärde till $1/\sqrt{26}$.

2. Växande/Avtagande.

Verktyg: Medelvärdessatsens följdsatser säger att

Om $f'(x) > 0$ för alla x i intervallet I, så är f strängt växande i I.
Om $f'(x) < 0$ för alla x i intervallet I, så är f str avtagande i I.
Om $f'(x) = 0$ för alla x i intervallet I, så är f konstant i I.

(Slutsatsen i de första två gäller fortfarande även om $f'(x) = 0$ i enstaka punkter och för kontinuerliga funktioner sprider sig växandet/avtagandet ända ut till ändpunkterna på intervallet)

Uppgift 1: Visa att $f(t) = t - \sin t$ är en strängt växande funktion på intervallet $[0, 4\pi]$.

Uppgift 2: Visa att $g(x) = \dfrac{1}{x} - \tan x$ är strängt avtagande på intervallet $(0, 1)$.

3. Max/min (största/minsta värde).

Verktyg: Satsen om max/min kan garantera existensen. Om max/min finns måste de antas i kritiska punkter, singulära punkter eller randpunkter.

Uppgift 1: Avgör om $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ antar ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 3]$. Bestäm största och minsta värdet om de finns.

Uppgift 2: Avgör om $g(x) = \frac{1}{x} - \tan x$ antar ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $(0, 1)$. Bestäm största och minsta värdet om de finns. Hur blir det på intervallet $(0, 1]$?

Uppgift. Betrakta kurvan med ekvation

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 5.$$

Finn en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $(2, 1)$.

(Kan man göra på mer än ett sätt?)

Extrafråga: vad blir ekvationen för normalen?

Högre ordningens derivator

Att derivera derivatan:

Om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x)$ en funktion som talar om hur $f(x)$ förändras.

Om $f'(x)$ är deriverbar så är $f''(x)$ en funktion som talar om hur $f'(x)$ förändras.

Andraderivatan $f''(x)$ skrivs ibland också $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$

Och så vidare! Om f är n gånger deriverbar skrivs den n:te derivatan $f^{(n)}(x)$ eller $\dfrac{d^n f}{dx^n}$

Derivata i tillämpningar

Många samband kan formuleras med hjälp av **derivator**, t ex:

Tillväxttakten i en bakteriekoloni är proportionell mot mängden bakterier:

$$\frac{dM}{dt} = kM$$

Avsvalningstakten är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$$

Kraften är massan gånger **accelerationen**:

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Strömstyrka är **laddning per tidsenhet**:

$$i(t) = q'(t)$$