SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 7

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

12 september 2016

Injektiva funktioner

En funktion är en regel som till varje tal i definitionsmängden ordnar ett bestämt tal i värdemängden.

Injektiva funktioner avbildar alltid olika x på olika y, dvs:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ett annat sätt att säga exakt samma sak är:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Såna funktioner kallas alltså **injektiva** eller **ett-till-ett.**

Invers

För injektiva funktioner går det alltså (i princip) att för alla funktionsvärden tala om precis vilket x de kom ifrån.

Exempel. Om $y = f(x) = 2x + 1$, sä måste $x = \dfrac{y-1}{2}$. Detta ger oss en ny funktion som kallas **inversen** till f och skrivs f^{-1}.

I vårt exempel är $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$.

I allmänhet kan man för injektiva f definiera inversen på samma sätt genom

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

Invers forts.

En inverterbar funktion och dess invers uppfyller alltid:

$f^{-1}(f(x)) = x$, för alla x i definitionsmängden för f

$f(f^{-1}(y)) = y$, för alla y i definitionsmängden för f^{-1}

Obs att definitionsmängden för f är värdemängden för f^{-1} och värdemängden för f är definitionsmängden för f^{-1}

Obs att strängt växande och strängt avtagande funktioner alltid är injektiva och alltså inverterbara.

Invers forts.

Minns nu att en funktion är en regel, och regeln hänger inte på vilka bokstäver man har valt för att representera den. Ofta vill man ha x som variabel i funktionen, även för inversen. Det är smidigt när man ritar grafer i xy-planet t ex att man får det som man är van vid.

Om man byter y mot x så motsvarar det geometriskt en spegling i linjen $y = x$. Alltså gäller:

Funktionsgraferna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ är varandras spegelbilder i linjen $y = x$

Arbete

Uppgift 1: Bestäm inversen till funktionen f som ges av

$$f(x) = x^2 + 1, \quad x \leq 0.$$

Ange inversens definitionsmängd och värdemängd samt rita kurvorna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Uppgift 2: Visa att $g(x) = x^5 + x^3 + 1$ är inverterbar.

Exponentialfunktionen

Exp. Det finns en funktion $\exp(x) = e^x$ som är definierad för alla x och som har som värdemängd alla $y > 0$.

Vi har potenslagarna som gäller för alla s och t:

$$e^s e^t = e^{s+t}$$

$$e^s / e^t = e^{s-t}$$

$$(e^s)^t = e^{st}$$

$$1/e^t = e^{-t}$$

$$e^0 = 1$$

Exp forts

Exponentialfunktionen är deriverbar för alla x och

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Exponentialfunktionen är strängt växande på hela reella axeln.

Dessutom:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Den naturliga logaritmfunktionen

Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande är den injektiv och har därmed invers. Inversen kallas den naturliga logaritmfunktionen, skrivs ln.

Vi har alltså:

$$\ln y = x \iff y = e^x$$

Eller på ren svenska:

logaritmen för y är det tal man ska höja e till för att resultatet ska bli y.

ln forts

Vi har logaritmlagarna som gäller för alla s och t större än 0:

$$\ln(st) = \ln s + \ln t$$

$$\ln(s/t) = \ln s - \ln t$$

$$\ln(s^t) = t \ln s$$

$$\ln(1/t) = -\ln t$$

$$\ln 1 = 0$$

ln forts

Definitionsmängden för den naturliga logaritmfunktionen ln är alla positiva reella tal och värdemängden är alla reella tal.

$\ln x$ är deriverbar för alla $x > 0$ och

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Den naturliga logaritmfunktionen är strängt växande för $x > 0$. Dessutom:

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Självklarheter

Två självklara saker:

$\ln e^x = x$, för alla x.

$e^{\ln x} = x$, för alla $x > 0$

Uppgift 1. Bestäm inversen till funktionen h som ges av

$$h(x) = 2e^{3x} + 1$$

och ange inversens definitionsmängd och värdemängd. Skissa (på ett ungefär bara) $y = h(x)$ och $y = h^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Uppgift 2. Sant eller falskt: om en funktion är strängt växande så är dess invers strängt avtagande?

Andra exponentialfunktioner

Om vi vill använda andra baser än talet e så kan vi göra så här:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Dvs a^x kan alltid skrivas som e^{kx} med nån konstant k. Här tänker vi oss att a är något positivt tal men inte 1.

På samma vis kan man översätta mellan logaritmer med olika baser.

Viktiga gränsvärden

Dessa standardgränsvärden måste man kunna ($a > 0$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

Talet e

Talet e är ett specifikt reellt tal, det är inte rationellt, och det brukar definieras genom ett gränsvärde eller en summa:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Ett annat sätt kan vara att först definiera exponentialfunktionen exp och sedan sätta $e = \exp(1)$.

Hur som helst gäller att $e \approx 2.71828$

Bevis?

För att bevisa allt det vi har sagt om exp och ln kan man i princip utgå från vad e^r betyder om r är rationellt och sedan definiera e^x som ett gränsvärde av e^r när r är rationellt och går mot x. Då blir e^x definierat för alla x. Sedan får man bevisa potenslagarna och derivatan av e^x. Man måste visa att e^x är strängt växande och då vet man att den har invers som man kan kalla ln. Potenslagar ger då loglagar, osv osv.

Detta går att göra, men problemet är att det är väldigt svårt att göra det ordentligt. Bara att bevisa att potenslagarna gäller för icke-rationella exponenter blir ganska knöligt.

Bevis?

Därför gör boken på ett annat sätt. Boken börjar med att definiera $\ln x$ som en integral (se kap 3.3). Med den definitionen är det lätt att bevisa loglagarna och derivatan av $\ln x$, som lätt visas vara strängt växande. Därmed har den invers som vi kan kalla *exp*. Potenslagarna härleds ur loglagarna och derivatan av $\exp(x)$ får vi med hjälp av derivatan av $\ln x$. På detta sätt lyckas boken bevisa alla fakta som vi vill ha kring exp och ln utan att det blir för krångligt. Sen kollar man så att de funktioner vi får på detta sätt är just de vanliga exp och ln.

Inversa trigonometriska funktioner

Eftersom sinus, cosinus, tangens och cotangens är periodiska funktioner så kan de inte inverteras. Man skulle kunna tro att det var end of story men så är det inte. Om man **begränsar definitionsmängderna** till dessa funktioner så får man nämligen funktioner som går att invertera:

Funktionen $S(v) = \sin v, \ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, är inverterbar och inversen heter arcsin, eller $\sin^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arcsin t = v \iff t = \sin v$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$.

Eller på ren svenska:

$\arcsin t$ är den vinkel (i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) vars sinusvärde är t.

Defintionsmängden för arcsin är självfallet $[-1, 1]$ och värdemängden förstås $[-\pi/2, \pi/2]$.

arccos

Funktionen $C(v) = \cos v,\; 0 \le v \le \pi$, är inverterbar och inversen heter arccos, eller $\cos^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arccos t = v \iff t = \cos v$ och $0 \le v \le \pi$.

Eller på ren svenska:

$\arccos t$ är den vinkel (i intervallet $[0, \pi]$) vars cosinusvärde är t.

Defintionsmängden för arccos är självfallet $[-1, 1]$ och värdemängden förstås $[0, \pi]$.

arctan

Funktionen $T(v) = \tan v, \ -\pi/2 < v < \pi/2$, är inverterbar och inversen heter arctan, eller $\tan^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arctan t = v \iff t = \tan v$ och $-\pi/2 < v < \pi/2$.

Eller på ren svenska:

$\arctan t$ är den vinkel (i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) vars tan-värde är t.

Defintionsmängden för arctan är självfallet $\mathbb{R}$ och värdemängden förstås $(-\pi/2, \pi/2)$.

Uppgift. Förenkla så långt som möjligt:

$$\arcsin 0, \qquad \arcsin 1\,, \qquad \arccos 0, \qquad \arccos 1$$

$$\arctan 0, \qquad \arctan 1\,, \qquad \arccos \frac{1}{2}, \qquad \arctan \sqrt{3}$$

$$\ln \frac{1}{e}, \qquad 2 \ln x + \ln \frac{3}{x^2} \qquad \ln e^{\ln x}$$

Viktiga derivator

De inversa trigonometriska funktionernas derivator:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \text{för alla } x$$

(Ni får själva lista ut arccot. Läxa: Moduluppg: 1, 2, 4, 8)