DD1350 Logik för dataloger

Fö 3 – Satslogikens semantik

Kort repetition

Satslogik – formellt språk för att uttrycka påståenden med **variabler** och **konnektiv** $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$

t.ex.

$$p \wedge \neg q \rightarrow r$$

Kort repetition

Naturlig deduktion – system av regler för att generera nya påståenden (slutsatser) utifrån givna påståenden (premisser) med symbolisk manipulation.

Genom att använda reglerna upprepade gånger kan vi konstruera (ev. långa och komplicerade) **bevis.**

Man kan nu fråga sig:

- är alla regler korrekta (och vad betyder ”korrekta”)?
- har vi tillräckligt många regler?

Satslogikens semantik

”Semantik” = innebörd, betydelse

Fråga: När är formeln $p \wedge \neg q \rightarrow r$ sann?

Satslogikens semantik

Fråga: När är formeln $p \wedge \neg q \rightarrow r$ sann?

Svar: Det beror på variablernas **sanningsvärden**. Vilka påståenden variablerna representerar är inte relevant .

Formeln ovan är till exempel falsk om p är sann medan q och r är falska.

Valueringar

En **valuering** är en tilldelning av sanningsvärden till varje variabel, t.ex.:

$$\{p : \mathrm{F}, q : \mathrm{T}, r : \mathrm{F}\}$$

Givet en valuering kan vi beräkna sanningsvärdet på hela formler med hjälp av **sanningsvärdestabeller** (en tabell per konnektiv)

Sanningsvärdestabeller

Negation

φ	$\neg\varphi$
T	F
F	T

Konjunktion

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Sanningsvärdestabeller

Disjunktion

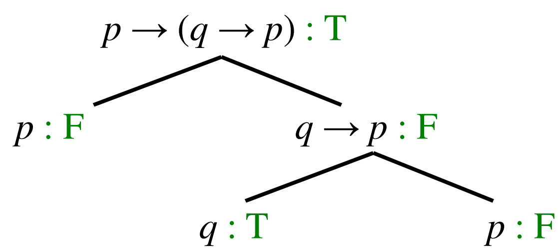
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Implikation

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Formelns sanningsvärde

- En formels sanningsvärde kan nu beräknas rekursivt.
- Exempel: $p \to (q \to p)$ och $\{p : \mathrm{F}, q : \mathrm{T}\}$



Exemplet i tabellform

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

Övning

Vilka valueringar gör följande formel sann:

$$(p \to q) \to p$$

- Alla valueringar där *p* är sann
- Alla valueringar där *p* är falsk
- Inga valueringar

11

Modeller

En **modell** till en formel är en tolkning av symbolerna i formeln så att formeln blir sann eller falsk

- I satslogik är modell = valuering
- Senare i kursen kommer vi att träffa på andra sorters modeller

(OBS att i andra logikböcker så är ”modell” = ”tolkning som gör formeln sann”. Men vi kommer att hålla oss till bokens terminologi att ”modell” = ”tolkning”).

Logisk konsekvens

Formeln ψ är en **logisk konsekvens** av $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ om ψ är sann i alla modeller i vilka $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ är sanna.

Detta skrivs

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Logisk konsekvens

Logisk konsekvens **i satslogik** kan undersökas med hjälp av sanningsvärdestabeller.

T.ex. är det sant att $p \wedge q \models p \vee q$?

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

Alla valueringar som gör premisserna sanna

Alla valueringar som gör slutsatsen sann

Övning

Vilka av formlerna nedan är en logisk konsekvens av

$p \wedge q$?

- $p \wedge \neg q$
- $\neg p \wedge q$
- $p \vee q$

Sundhet

Ponera att vi kan bevisa ψ utifrån premisserna
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.
Är det då också så att ψ är en logisk konsekvens av
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$?
Dvs är det sant att

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ medför att $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$?

Denna (önskvärda) egenskap kallas **sundhet**.

… och svaret är **ja**, naturlig deduktion är sund för satslogik.

Sundhet, bevisskiss

Sundhet kan bevisas med **strukturell induktion** (som vi kommer betrakta närmare i period 2).

Kärnan i beviset är en fall-analys: För varje bevisregel visar vi att regeln är sund, dvs att slutsatsen är en logisk konsekvens av premisserna.

Induktionssteget visar att vi om vi kombinerar sunda regler får vi ett sunt bevissystem.

Sundhet, $\wedge e_1$

T.ex. $\wedge e_1 \quad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Alla valueringar som gör premisserna sanna

Alla valueringar som gör slutsatsen sann

Sundhet, $\vee e$

Genomgång på tavlan

Sundhet, följder

En följd av satslogikens sundhet är:

Om ψ **inte** är en logisk konsekvens av $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ så **finns det heller inget bevis** för ψ utifrån premisserna $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Dvs vi kan använda metoden med sanningstabeller för att en viss sekvent **inte** är bevisbar.

Fullständighet

Ponera att ψ är en logisk konsekvens av
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.
Är det då också så att vi kan bevisa ψ utifrån premisserna
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$?
Dvs är det sant att
$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ medför att $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$?

Denna (önskvärda) egenskap kallas **fullständighet**.

… och svaret är **ja**, naturlig deduktion är fullständig för satslogik.

Övning

Johans första bevissystem J1 har en enda bevisregel:

$$\frac{\varphi}{\varphi}$$

- J1 är sunt men inte fullständigt
- J1 är fullständigt men inte sunt
- J1 är varken sunt eller fullständigt

22

Övning

Johans andra bevissystem J2 har en enda bevisregel:

$$\frac{}{\varphi}$$

- J2 är sunt men inte fullständigt
- J2 är fullständigt men inte sunt
- J2 är varken sunt eller fullständigt

23

Validitet och satisfierbarhet

En formel är **valid** om den är sann i alla modeller.

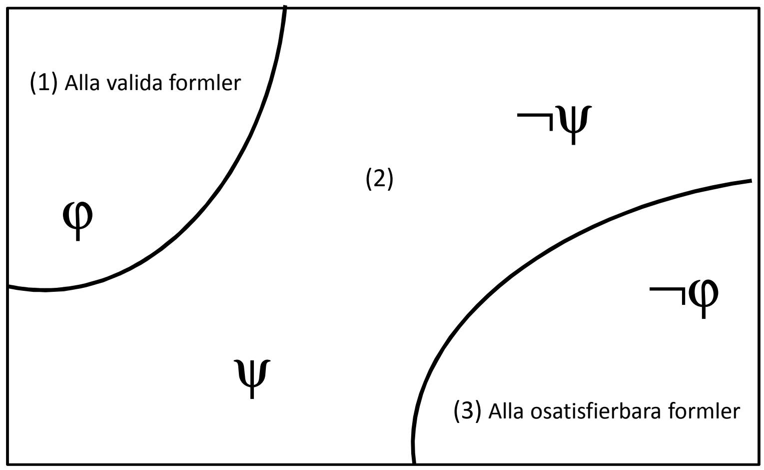
Enklaste exemplet: $p \vee \neg p$

En formel är **satisfierbar** om den är sann i någon modell.

Enklaste exemplet: p

En formel är **osatisfierbar** om den är falsk i alla modeller.

Enklaste exemplet: $p \wedge \neg p$



(1) + (2) + (3) = Alla satslogiska formler som finns
(1) + (2) = Alla satisfierbara formler
Om φ är valid så är ¬φ osatisfierbar
Om ψ är varken valid eller osatisfierbar, så gäller samma sak även för ¬ψ