

**Lappskrivning 1, version B,
i SF1633 Differentialekvationer I.
fredag 9 september 2016, klockan 10.15–12.00**
LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

Man ser att HL i DE'n kan skrivas om så att vi får

$$y'(x) = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

som indikerar att här finns inga konstanta lösningar.
Variabelseparation ger sambandet

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x^2) dx$$

Vi vet, eller hittar i Beta,

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(y)$$

och

$$\int (1 + x^2) dx = x + \frac{x^3}{3} + C$$

alltså får vi

$$\arctan(y) = x + \frac{x^3}{3} + C$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger

$$C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Vi får först

$$\arctan(y) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}$$

som resulterar i svaret

$$y = \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) Lösning

Problemet löses m h a integrerande faktorn $\mu(x)$, men då måste DE'n skrivas först på standardformen

$$y' + \frac{4}{x} y = \frac{e^{3x}}{x^3} \tag{1}$$

efter division med x^3 . Inga problem: $x > 0$ pga begynnelsevillkoret! Då blir

$$\mu(x) = e^{\int (4/x) dx} = e^{4 \ln|x|} = |x|^4$$

Detta leder till

$$(\mu y)' = x^4 \frac{e^{3x}}{x^3} = x e^{3x} \quad (2)$$

Partiell integration, eller BETA, ger

$$\mu y = \int x e^{3x} dx = \dots = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C. \quad (3)$$

som resulterar i den allmänna lösningen

$$y(x) = e^{3x} \left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{9x^4} \right) + \frac{C}{x^4}$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger $0 = (1/3 - 1/9)e^3 + C$ alltså $C = -2e^3/9$ och slutsvaret blir

$$y(x) = e^{3x} \left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{9x^4} \right) - \frac{2e^3}{9x^4}$$

Det största intervall som innehåller $x = 1$ är $x > 0$.

3) Lösning

a) Vi får de kritiska punkterna, konstanta lösningarna, av

$$\frac{dP(t)}{dt} = -0.5(1 - P)(3 - P) = 0 \quad (4)$$

ma o $P = 1$ och $P = 3$. Teckenstudie av $P'(t)$, ekv(4), visar att $P = 1$ är en repeller, instabilt, och $P = 3$ är en attraktor, stabilt.

b) Lösningsdiagram

