KTH Matematik A

Lappskrivning 1, version A,
i SF1633 Differentialekvationer I.
torsdag 8 september 2016, klockan 10.15–12.00

LÖSNINGSFÖRSLAG

---

1) Lösning

Först kollar vi konstanta lösningar, $y' = 0$, vilket leder till $y = 1$ och $y = -1$, som inte satisfierar $y(1) = 2$.
De icke-konstanta lösningarna får vi genom att observera att DE'n är separabel, vilket ger

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = \int \frac{dx}{x} \tag{1}$$

Integralerna löses antingen m h a partialbråksuppdelning eller m h a Beta,

$$\int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} \quad = \quad \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} \ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln|x| + C_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-1}{y+1} = Cx^2, \;\; C = \mathrm{e}^{2C_1} \tag{3}$$

En relativ enkel omformning resulterar i den allmänna icke-konstanta lösningen

$$\boxed{y = \frac{1+Cx^2}{1-Cx^2}}$$

Med insatta villkoret $y(1) = 2$ får vi snabbt $C = 1/3$ och slutresultatet blir

$$\boxed{y = \frac{3+x^2}{3-x^2}}$$

---

2) Lösning

Vi ser att vi har en DE av 1:a ordning med $x > 0$ och skriver den först på standardformen

$$y'(x) - \frac{2}{x} y(x) = x^2 \mathrm{e}^{3x} \tag{4}$$

som lämpligen löses m h a en integrerande faktor

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int(-2/x)dx} = \mathrm{e}^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \tag{5}$$

Detta ger oss sambandet

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)x^2\mathrm{e}^{3x} = \frac{1}{x^2}x^2\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}. \tag{6}$$

En integration leder till

$$\frac{1}{x^2}\,y(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C \tag{7}$$

som resulterar i den **allmänna** lösningen

$$\boxed{y(x) = x^2\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C\right)}$$

Insättning av BV $y(1) = 0$ ger $0 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 + C$ eller $C = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^3$. Alltså blir den **sökta** lösningen

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{3}\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^3\right)}$$

---

3) Lösning

---

a) Vi får de kritiska punkterna, konstanta lösningarna, av

$$\frac{dP(t)}{dt} = 2P(t)(P - 5/2) = 0 \tag{8}$$

m a o $P = 0$ och $P = 2.5$. Teckenstudie av $P'(t)$, ekv(**??**), visar att $P = 0$ är en attraktor, stabilt, och $P = 2.5$ är en repeller, instabilt.

b) Lösningsdiagram,