Exercise 2.35

Bevisar p är hopningspunkt i S

$\Rightarrow \forall r \exists q \in M_r p \cap S$ och $q = p$.

Per definition så har $M_r p \cap S$ oändligt många punkter d.v.s $M_r p \cap S \setminus \{p\} \neq \phi$ så det finns ett $q \in M_r p \cap S \setminus \{p\}$.

Bevis $\forall r \exists q \in M_r p \cap S$ och $q \neq p$

$\Rightarrow$ p är en hopningspunkt.

Välj ett $r_0 > 0$ då existerar $q_1 \in M_r p \cap S \setminus \{p\}$ enl. antagande.

Välj $r_1 = \underbrace{\frac{d(q_1, p)}{2}}_{>0 \text{ eftersom } q_1 \neq p} > 0 \Rightarrow \exists q_2 \in M_{r_1} p \cap S \setminus \{p\}$.

~~Induktivt~~ observera att $q_1 \notin M_{r_1} p \cap S$ eftersom $d(q_1, p) = 2r_1$ och $M_{r_1} p$ bara innehåller punkter q så att $d(q, p) < r_1$ dvs $q_1 \neq q_2$

Induktivt så kan vi definiera

$r_k = d(q_k, p)$ och hitta

$q_{k+1} \in M_{r_k} p \cap S \setminus \{p\}$.

Observera att

$$\underbrace{q_{k+1}, q_{k+2}, q_{k+3} \ldots}_{\text{Oändligt många.}} \in M_{r_k} p \cap S \setminus \{p\}$$

Och $r_k < \frac{r_0}{2^k} \to 0$

Så för varje $r > 0$ så finns det ett $r_k < r$ och oändligt många $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots$ så att $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots \in M_{r_k} p \setminus \{p\} \subset M_r p \setminus \{p\}$.

$\blacksquare$

2. [6] 2-sfären, $S^2 \subset [-1,1] \times [-1,1]$

Så S^2 är kompakt.

Men $\mathbb{R}^2$ är obegränsad och därför inte kompakt.

Homeomorfier bevarar kompakthet så S^2 kan inte vara homeomorf med $\mathbb{R}^2$.