

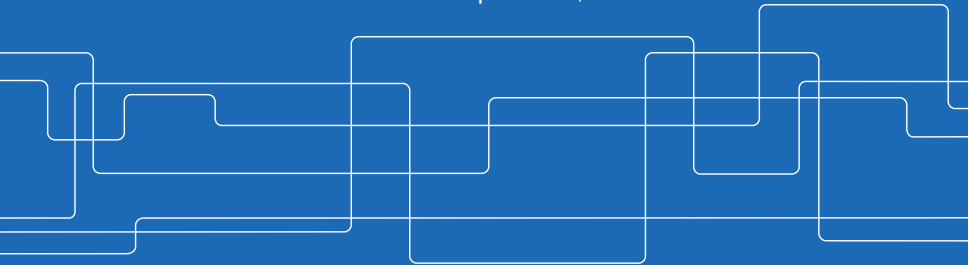


Föreläsning 9

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

21 september, 2016





Tillstånd återkoppling

Antag att vi återkopplar ett system med hjälp av $u = -Lx + l_0r$.
Då blir det återkopplade systemet på formen:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = -Lx + l_0r \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(-Lx + l_0r) \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\implies \boxed{\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bl_0r \\ y = Cx \end{cases}}$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till $A - BL$, dvs. rötterna till ekvationen $\det [sI - (A - BL)] = 0$.



Polplacering

Vi observerar att

- $A - BL$ har n stycken egenvärden
- L har n stycken parametrar

Om systemet är styrbart kan det slutna systemets poler placeras godtyckligt via lämpligt val av L .



Example

Antag att vi har systemet och återkopplingen

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \\ u &= -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + l_0 r \end{cases}$$

Vi beräknar $A - BL$ som

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$



Polplacering

Example (fort.)

Egenvärden till $A - BL$ ges av

$$\det [\lambda I - (A - BL)] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ l_1 & \lambda + l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + l_2\lambda + l_1$$

Antag nu att vi t.ex. vill placera polerna i -3 och -3 (dubbelpol).

$$\Rightarrow (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

Jämför vi nu med ekvationen ovan ser vi att vi bör välja

$$\begin{cases} l_2 = 6 \\ l_1 = 9 \end{cases} \implies u = -9x_1 - 6x_2 + l_0r$$



Polplacering

Example (fort.)

Detta ger oss det återkopplade systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Hade vi istället velat lägga polerna i -3000 och -3000 (ca 1000 gånger snabbare) skulle vi behövt välja

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 &= 9 \cdot 10^6 \\ l_2 &= 6 \cdot 10^3 \end{cases}$$

Vi inser att valet av slutna systemets poler begränsas av storleken på $u(t)$.



Polplacering

Hur ska man välja l_0 ?

Så att $y(t) = r(t)$ i stationärt tillstånd då $r(t) = \text{konstant}$, dvs.
 $G_c(0) = 1$.

Kom ihåg att $\dot{x} = 0$ i stationärt tillstånd.

Example (fort.)

Vi hade det återkopplade systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

I stationärt tillstånd och med konstant referens har vi

$$\begin{cases} r(t) &= \bar{r} \\ \dot{x} &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -9x_1 - 6x_2 + l_0 \bar{r} = 0 \end{cases}$$

Som direkt ger $x_1 = \frac{l_0}{9} \bar{r}$. Men eftersom $y = x_1 = \frac{l_0}{9} \bar{r}$ så bör vi välja $l_0 = 9$ för att $y = \bar{r}$.

$$\implies u = -9x_1 - 6x_2 + 9r$$



Polplacering

Svagheten med metoden vi använde ovan för att bestämma l_0 är att den kräver att man känner till $G(0)$ och att inga störningar påverkar systemet.

⇒ Inför I-reglering.



Sammanfattning

Tillståndsåterkoppling:



$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \iff G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$



$$u = -Lx + l_0 r \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_0 r \\ y &= Cx \end{cases} \Rightarrow G_c(s) = \frac{(b_1 s^{n-1} + \dots + b_n) l_0}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

- Poler: $\det[sI - (A - BL)] = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$
- - Vi kan påverka slutna systemets poler via L (optimering)
 - Nollställen ändras ej

Example (Styrbar kanonisk form, s. 133)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (b_1 \cdots b_n)x$$

$$\Rightarrow A - BL = \begin{pmatrix} -\overbrace{(a_1 + l_1)}^{\alpha_1} & -\overbrace{(a_2 + l_2)}^{\alpha_2} & \cdots & -\overbrace{(a_n + l_n)}^{\alpha_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Styrbar kanonisk form

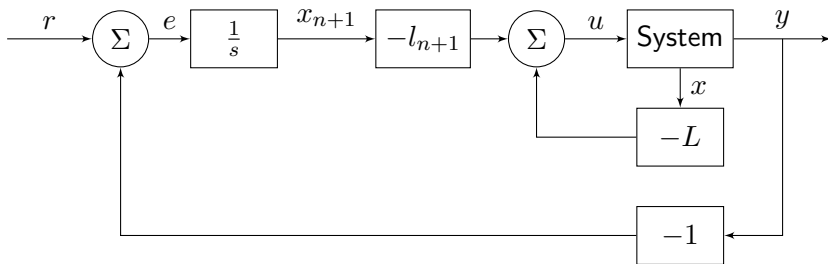
Det återkopplade systemet är också på styrbar kanonisk form.

- Lätt att bestämma L
- Lätt att inse att nollställena ej påverkas (samma $C!$)

Välj l_0 så att $G_c(0) = 1$.

$$\Rightarrow l_0 = \frac{\alpha_n}{b_n}$$

Svaghet: Vi måste känna till α_n och b_n exakt och får ej ha störningar eller statistiskt reglerfel.



Vi tar till ett knep och inför *extra tillstånd*

$$x_{n+1} = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t [r(\tau) - y(\tau)] d\tau$$

$$\dot{x}_{n+1} = -Cx + r$$



Yttre I-reglering

Vi utvidgar modellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_B u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$



Yttre I-reglering

Tillståndsåterkoppla:

$$u = -Lx - l_{n+1}x_{n+1} \Leftrightarrow u = -\mathbf{L}\mathbf{x}$$

Välj \mathbf{L} så att $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}$ får önskade egenvärden (poler).

Stationärt har vi

$$\begin{cases} \dot{x} & = 0 \\ \dot{x}_n & = y - r = 0 \end{cases}$$

trots t.ex. stegstörningar och modellfel.



Observatör

Vad gör man om alla tillståndsvariabler **ej** kan mätas exakt?

Svar: Inför en *observatör*. (Skatta tillstånden)

Exempelvis kan vi mäta läge och därutav uppskatta hastigheten.

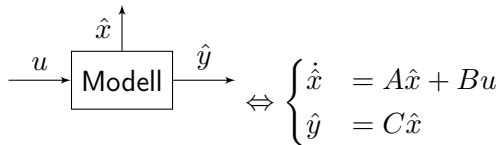


Observatör

Antag vi har en modell:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

Idén är att simulera systemet:



Felsignalen är

$$y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

och ett mått på hur bra simuleringen fungerar.



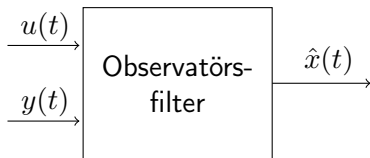
Observatör

Återkoppla! \Rightarrow Observatör (Kalmanfilter)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Observera att K är en $n \times 1$ vektor (P-reglering).





Hur väljer vi K ?

Skattningsfelet \tilde{x} ges av:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Ck - C\hat{x})$$

$$\implies \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x},$$

där $\tilde{x}(0)$ är initialt fel,



Observatör

Lösningen till $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$ ges av

$$\tilde{x}(t) = e^{[A-KC]t} \tilde{x}(0)$$

Notera att:

- $\tilde{x} \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ om egenvärdena till $A - KC$ ligger i V.H.P.
- Med hjälp av K kan vi påverka hur snabbt $\tilde{x} \rightarrow 0$
- Om systemet är observerbart kan man placera egenvärdena till $A - KC$ godtyckligt



Observatör

Mätfelet ges av $y_m = y + e$.

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + Ke$$

Stort $K \Rightarrow$ Känsligt för mätfel

Litet $K \Rightarrow$ Långsamt

Optimera \Rightarrow Kalmanfilter!

Reglering: Välj $|\text{eig}(A - BL)| \leq |\text{eig}(A - KC)|$

Example

Betrakta systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

Vi beräknar

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

och sedan

$$\det [sI - (A - KC)] = s^2 + k_1s + k_2$$

(Slutna systemets poler i -3).



Example (fort.)

Lägg observatörpolerna i t.ex. -4 :

$$(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Svar:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} (y - (1 \ 0) \hat{x})$$



Återkoppling från rekonstruerade tillstånd

System:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

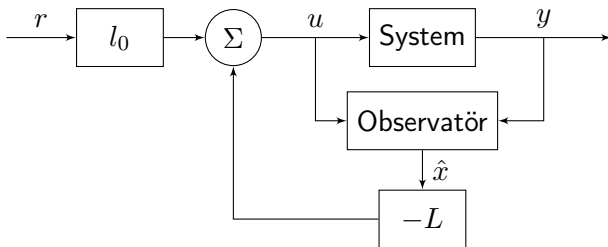
$$y = Cx$$

Observatör:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - c\hat{x})$$

Återkoppling:

$$u = -L\hat{x} + l_0r$$





Återkoppling från rekonstruerade tillstånd

Återkopplat system? (Ordning $2n$)

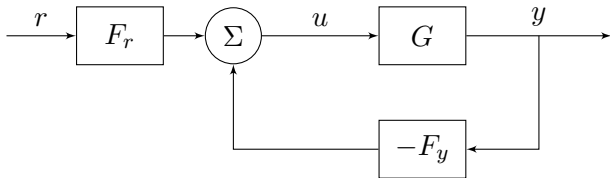
$$G_c(s) = C[sI - (A - BL)]^{-1}Bl_0$$

Identisk G_c som vid tillståndsåterkoppling eftersom $\hat{x}(0) = x(0) = 0$ vid överföringsfunktions-algebra.

Förklaring: \tilde{x} är ej styrbar, men observerbar. Motsvarande poler förkortas.



Alternativ implementering



$$F_r = \left(1 - L[sI - (A - BL - KC)]^{-1}B\right)l_0$$

$$F_y = L[sI - (A - BL - KC)]^{-1}K$$

"Polplacering"



Komplementära känslighetsfunktionen

Den komplementära känslighetsfunktionen ges av

$$T(s) = G_c(s) \times \underbrace{L[sI - (A - KC)]^{-1} K}$$

L , K och observatörens dynamik påverkar robustheten

Den vanliga känslighetsfunktionen ges av

$$S = 1 - T$$