

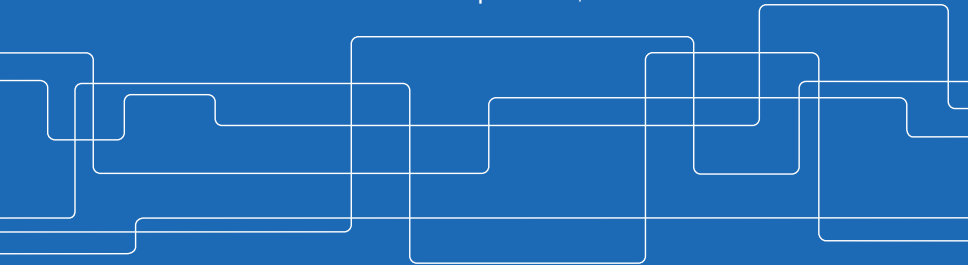


Föreläsning 8

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

16 september, 2016





Introduktion

Förra gången:

- **Tillståndsmodell:**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

$x(t)$ $n \times 1$ vektor (tillståndsvektor)

A $n \times n$ matris

B $n \times 1$ vektor

C $1 \times n$ vektor

Dagens program:

- Observerbarhet
- Styrbarhet



Exponentialfunktioner

Hur löser vi

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Generalisera *integrerande faktor* $e^{-A\tau}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}e^{-A\tau} &= e^{-A\tau}(-A) \\ \Rightarrow e^{-A\tau}[\dot{x} - Ax] &= e^{-A\tau}Bu \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau}[e^{-A\tau}x] &= e^{-A\tau}Bu \\ \Rightarrow \underbrace{\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^{-A\tau}x] d\tau}_{e^{-At}x(t) - x(0)} &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau\end{aligned}$$



Exponentialfunktioner

Sista steget på förra sidan:

$$\left(\Rightarrow \underbrace{\int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^{-A\tau} x] d\tau}_{e^{-At}x(t) - x(0)} = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right)$$

Varur vi kan lösa ut ett uttryck för $x(t)$ som

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Observera dock att e^{At} är en matrisfunktion!



Exponentialfunktioner

Hur beräknar man e^{At} ?

Lös $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, $e^{A \cdot 0} = I$.

1. Serierutveckla

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ..$$

2. Laplace

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$



Exponentialfunktioner

3. Diagonalisering

Antag att A kan diagonaliseras

$$A = TDT^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (\text{egenvärden})$$

Då är $e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$, där

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Bevis via t.ex. serierutvecklingen, $A^k = TD^kT^{-1}$.

Observera att $e^{At} \rightarrow 0$, när $t \rightarrow \infty$ om egenvärdena till A , dvs systemets poler, ligger i V.H.P.

4. Via Cayley-Hamiltons sats.



Cayley-Hamiltons Sats

Låt

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

Då är

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

Observation, om A^{-1} existerar:

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_n} [A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I]$$

med $a_n = \det(-A)$!



Cayley-Hamiltons Sats, forts

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \dots - a_{n-1} A - a_n I$$

Vad blir

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -a_1 A^n \dots - a_{n-1} A^2 - a_n A \\ &= b_1 A^{n-1} + \dots + b_{n-1} A + b_n I \end{aligned}$$

Fortsätt för $p \geq n$

$$A^p = b_1^{(p)} A^{n-1} + \dots + b_{n-1}^{(p)} A + b_n^{(p)} I$$

Följaktligen

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \dots \\ &= f_0(t)I + \dots + f_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned}$$

där $\{f_i(t)\}$ är linjärt oberoende som funktioner av t .



Exponentialfunktioner

Example

Antag att vi har

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi kan då räkna ut

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Vilket sen hjälper oss bestämma e^{At} som

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observera att $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, och att därför serieutvecklingen för e^{At} ges exakt av $e^{At} = I + At$.



Styrbarhet och Observerbarhet

Example (8.13)

Antag vi har systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Systemets överföringsfunktion ges då av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+1}$$

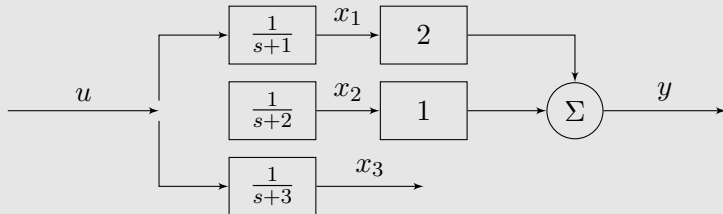
Har vi rätt antal tillstånd?

Example (8.13 fort.)

Vi finner x_1 genom första raden i ekvationssystemet

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u \Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$$

och sedan på samma sätt för x_2 och x_3 .



x_2 påverkas ej av $u \Rightarrow$ Ej styrbar

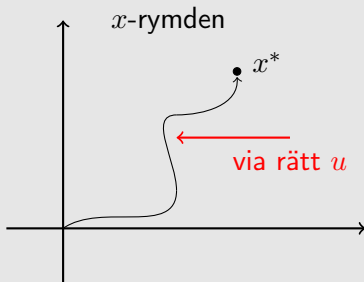
x_3 syns ej i $y \Rightarrow$ Ej observerbar



Styrbarhet

Definition (Styrbarhet)

Tillståndet x^* är styrbart om man kan styra från 0 till x^* med hjälp av u (på ändlig tid).





Test av Styrbarhet

Vi har med $x(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

där

$$e^{At} = f_0(t)I + \dots + f_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Detta medför att

$$x(t) = \gamma_0(t)B + \gamma_1(t)AB + \dots + \gamma_{n-1}(t)A^{n-1}B$$

där

$$\gamma_k(t) = \int_0^t f_k(t-\tau)u(\tau)d\tau$$



Test av Styrbarhet, forts

Dvs, de x^* som är styrbara är linjärkombinationer av vektorerna $B, AB, \dots, A^{n-1}B$, dvs ligger i *värderummet* till styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{S} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

Systemet är **styrbart** om \mathcal{S} har full rang $= n$, dvs om $\det(\mathcal{S}) \neq 0$



Example (Test av styrbara tillstånd)

Antag att vi har systemet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar produkten

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

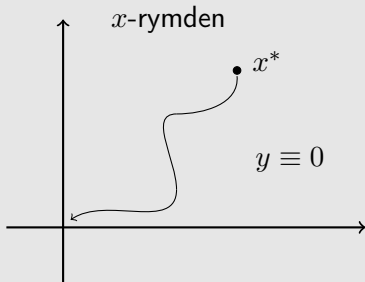
för att kunna sätta in i styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{S} = [B \ AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vars determinant, $\det(\mathcal{S}) = -1 \neq 0$, säger oss att systemet är styrbart.

Definition (Observerbarhet)

Tillståndet x^* är icke observerbart om utsignalen är identiskt noll då initialvärdet är x^* och insignalen identiskt noll.





Test av Observerbarhet

Vi har med $u(t) \equiv 0$ och $x(0) = x^*$

$$y(t) = Ce^{At}x^*, \quad y^{(k)}(t) = CA^k e^{At}x^*, \quad t \geq 0$$

Speciellt gäller att $y \equiv 0$ om

$$y(0) = Cx^* = 0$$

$$\dot{y}(0) = CAx^* = 0$$

\vdots

$$y^{(n-1)}(0) = CA^{(n-1)}x^* = 0$$

Varför sluta vid $k = n - 1$?



Test av Observerbarhet, forts.

Dvs. icke-observbara tillstånd x^* ligger i *nollrummet* till observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Systemet är **obseverbart** om \mathcal{O} har full rang $= n$, dvs om $\det(\mathcal{O}) \neq 0$



Observerbarhet

Example (Test av observerbara tillstånd)

Antag att vi har systemet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0)$$

Vi beräknar produkten

$$CA = (0 \quad 0)$$

för att kunna sätta in i observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vars determinant, $\det \mathcal{O} = 0$, säger oss att systemet **ej** är observerbart



Observerbarhet

Example

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 1 \quad 0)$$

$$\implies \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}x^* = 0$$

$$\implies x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dvs. x_3 är ej observerbar.



Minimal

Minimal om insignal-utsignalsambandet kan ej beskrivas med förre tillstånd = styrbart + observerbart