SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 8

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

14 september 2016

Första ordningen. En homogen ordinär linjär DE av ordning 1 med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

för någon konstant k.

Lösning: Vi ser att $y(t) = e^{rt}$ löser diffekvationen omm r löser den karaktäristiska ekvationen $r + k = 0$, dvs $r = -k$. Vi får sedan alla lösningar till diffekvationen som $y(t) = Ce^{-kt}$, där C är godtycklig konstant.

Bevis på tavlan (och i pdf på hemsidan)

Exempel. Lös differentialekvationen

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 0$$

och bestäm den lösning som också uppfyller initialvillkoret $y(0) = 2$

Exempel. Lös differentialekvationen

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 0$$

och bestäm den lösning som också uppfyller att $y(0) = 2$

Lösningsgång:

Karaktäristiska ekvationen $r + 1/2 = 0$ har lösning $r = -1/2$.

Diffekvationens allmänna lösning är $y(t) = Ce^{-t/2}$, C godt.

$y(0) = 2$ omm $C = 2$

Den lösning till diffekvationen som också uppfyller initialvillkoret är alltså $y(t) = 2e^{-t/2}$.

(Riktningsfält, initialvillkor, lösningskurva.)

Dagens tentaproblem

Dagens tentauppgift. När en kondensator med kapacitans C laddas ur över ett motstånd med resistans R gäller att spänningen u uppfyller differentialekvationen

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{RC} = 0.$$

Lös differentialekvationen och bestäm hur lång tid det tar för spänningen att halveras.

Homogena injära ODE m konst koeff

Andra ordningen. En homogen ordinär linjär DE av ordning 2 med konstanta koefficienter kan skrivas

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

för några konstanter a, b, c. (Bevis för nedanst i pdf o i boken)

Lösning: Vi ser att $y(t) = e^{rt}$ löser diffekvationen omm r löser den karaktäristiska ekvationen $ar^2 + br + c = 0$. Vi får tre fall:

Fall 1. Om $r_1 \neq r_2$ är reella, så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \text{ godt konst}$$

Fall 2. Om $r_1 = r_2$, reell, så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = (A + Bt)e^{r_1 t}, \quad A, B \text{ godt konst}$$

Fall 3. Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \quad A, B \text{ godt konst}$$

Arbete

Lös differentialekvationerna!

A. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$

B. $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$

C. $y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = 0$

Tillämpningsexempel

Diffekvationen $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ kallas ibland svängningsekvationen. Olika val av konstanterna a och b beskriver olika typer av svängning.

Odämpad svängning beskrivs då $a > 0$, $b = 0$ och $c > 0$, dvs

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

För positiva a, b och c skiljer man på dämpad svängning, kritiskt dämpad svängning och överdämpad svängning (se slutet av kap 3.7 i boken).