Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2016/2017

Teori för linjära ordinära differentialkvationer med konstanta koefficienter

1. Första ordningen

Homogena fallet. En homogen linjär differentialekvation av 1:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

för någon konstant k. Vi kan lösa den genom att undersöka den karaktäristiska ekvationen $r + k = 0$ som har lösning $r = -k$. Lösningen till differentialekvationen blir

$$y(t) = Ce^{-kt}, \text{ där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

Bevis. Det är lätt att kontrollera att e^{-kt} är en lösning till ekvationen. Frågan är om det kan finnas andra lösningar. Antag att $y(t)$ är en lösning, vilken som helst, dvs y uppfyller $y'(t) + ky(t) = 0$. I så fall gäller att

$$\frac{d}{dt}\frac{y(t)}{e^{-kt}} = \frac{y'(t)e^{-kt} - y(t)e^{-kt}(-k)}{(e^{-kt})^2} = \frac{y'(t) + ky(t)}{e^{-kt}} = 0$$

Det följer att

$$\frac{y(t)}{e^{-kt}} = C$$

för någon konstant C. Med andra ord är

$$y(t) = Ce^{-kt}, \quad C \text{ godtycklig konstant.}$$

alla lösningar till diffekvationen.

Inhomogena fallet. En inhomogen första ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = f(t)$$

där k är en konstant och f någon funktion av t. Om y_p är någon lösning till denna ekvation och y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'(t) + ky(t) = 0$ så gäller att allmänna lösningen till

$$y'(t) + ky(t) = f(t)$$

har formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Bevis. Anta att y_p är en partikulärlösning, dvs en lösning till $y'(t) + ky(t) = f(t)$. Det är lätt att se genom att derivera och sätt in i ekvationen att $y_h + y_p$ kommer att vara en lösning oavsett hur konstanten i y_h väljs. Men kan det finnas andra lösningar? Om y är en lösning, vilken som helst, så gäller att

$$(y - y_p)' + k(y - y_p) = f(t) - f(t) = 0$$

Med andra ord är $y - y_p$ en lösning till den homogena ekvationen. Det följer av resonemanget ovan om det homogena fallet att

$$y(t) - y_p(t) = Ce^{-kt}, \text{ för någon konstant } C$$

eller med andra ord att

$$y = y_h + y_p.$$

Alla lösningar fås alltså på detta sätt.

2. Andra ordningen

Homogena fallet. En homogen linjär differentialekvation av 2:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

för några konstanter a, b. Vi kan lösa den genom att undersöka den karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ som har lösning r_1 och r_2. Lösningen till differentialekvationen får delas upp i tre fall:

Fall 1. Om $r_1 \neq r_2$ och dessa är reella tal, så har differentialekvationen allmän lösning

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Fall 2. Om $r_1 = r_2$, så har differentialekvationen allmän lösnng

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Bte^{r_2 t}, \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Fall 3. Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ där α och β är reella tal, så har differentialekvationen allmän lösnng

$$y(t) = Ae^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t), \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Bevis. Det är lätt att kontrollera att funktionerna som anges ovan verkligen löser differentialekvationen i de olika fallen. Vi ska nu se att de ger alla lösningar. Vi vet att $e^{-r_1 t}$ är en lösning till ekvationen. Antag att y(t) är en annan lösning, vilken som helst, dvs att $y'' + ay' + by = 0$. Eftersom $e^{r_1 t}$ är skilt från noll så kan vi anta att den andra lösningen y kan skrivas $y(t) = v(t)e^{r_1 t}$, för någon funktion v. Om vi deriverar detta två gånger så ser vi (efter en del räknande och förenklande) att

$$y'' + ay' + by = 0 \iff v''(t) + (2r_1 + a)v'(t) = 0$$

vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$v''(t) + (r_1 - r_2)v'(t) = 0$$

på grund av sambandet mellan rötter och koefficienter i ett polynom (se wikipedia). Här ser vi att om $r_1 = r_2$ så måste $v''(t) = 0$ vilket ger att $v(t) = A+Bt$, för godtyckliga konstanter A och B. Det betyder att $y(t) = (A + Bt)e^{r_1 t}$. Detta bevisar fall 2.

Om $r_1 \neq r_2$ så får vi med hjälp av det vi gjort tidigare om första ordningens ekvation att

$$v'(t) = Ce^{-(r_1 - r_2)t}$$

och därför blir

$$v(t) = A + Be^{-(r_1 - r_2)t}, \text{ för godtyckliga konstanter } A, B$$

och följaktligen blir

$$y(t) = (A + Be^{-(r_1 - r_2)t})e^{r_1 t} = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

vilket bevisar fall 1, om $r_1 \neq r_2$ är reella.

Om rötterna är komplexa så får vi fortfarande lösningen som i fall 1 men då innehåller lösningen komplexa tal, dvs vi får (om rötterna är $\alpha \pm i\beta$):

$$y(t) = Ae^{(\alpha+i\beta)t} + Be^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(A(\cos\beta t + i\sin\beta t) + B(\cos\beta t - i\sin\beta t)).$$

Här kan vi välja konstanterna A och B fritt bland de komplexa talen. Om vi för några reella tal C och D väljer $A = C + iD$ och $B = C - iD$ så blir lösningen reell, och den kan då skrivas precis som det som står angivet i fall 3 (efter att man bytt namn på koefficienterna).

Inhomogena fallet. En inhomogen linjär differentialekvation av 2:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

för några konstanter a, b och någon funktion f av t. Om y_p är någon lösning till denna ekvation och y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ så gäller att allmänna lösningen till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

har formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Bevis. Anta att y_p är en partikulärlösning, en lösning till $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$. Det är lätt att kontrollera att $y_h + y_p$ blir en lösning till diffekvationen hur än koefficienterna i y_h väljs. Men får man alla lösningar på detta sätt? Om y är en lösning, vilken som helst, så gäller att

$$(y - y_p)'' + a(y - y_p)' + b(y - y_p) = f(t) - f(t) = 0$$

Med andra ord är $y - y_p$ en lösning till den homogena ekvationen. Det följer av resonemanget ovan om det homogena fallet att

$$y = y_h + y_p.$$

Så detta ger verkligen alla lösningar.

3. Konsten att hitta partikulärlösningar

När man letar partikulärlösningar är filosofin att man gissar att det går att hitta en partikulärlösning av samma funktionstyp som högerledet $f(t)$.

Om högerledet $f(t)$ är 10 så gissar man att man kan hitta en y_p som är en konstant. Dvs man ansätter $y_p = c$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer c

Om $f(t) = 2t$ så ansätter man $y_p = ct + d$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer talen c och d.

Om $f(t) = 3e^{-4t}$ så ansätter man $y_p = ce^{-4t}$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer talet c.

Om $f(t) = 5\cos 7t$ så ansätter man $y_p = c\cos 7t + d\sin 7t$, deriverar och sätter in i ekvationen och bestämmer talen c och d.

4. Fenomenet resonans

OM den tilltänkta gissade partikkulärlösningen y_p är en del av den homogena lösningen så får man bara noll när man deriverar och sätter in i ekvationen och det går inte att bestämma några konstanter. Då får man multiplicera den y_p man hade tänkt ansätta med t och använda det som sin gissade y_p.

Exempel: Om man ska lösa diffekvationen $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{3t}$ så hittar man först $y_h = Ae^t + Be^{3t}$. Sedan vill man ansätta $y_p = ce^{3t}$ men det funkar inte eftersom detta är en del av den homogena lösningen. Då ansätter man istället $y_p = cte^{3t}$, deriverar och sätter in i ekvationen och får

$$y_p = \frac{1}{2}te^{3t}.$$

Hela lösningen till diffekvationen $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ blir därför

$$y(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1}{2}te^{3t}.$$