Lappskrivning 1, version A,
i SF1633 Differentialekvationer I.
torsdag 8 september 2016, klockan 10.15–12.00

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

Först kollar vi konstanta lösningar, $y' = 0$, vilket leder till $y = 2$ och $y = -2$, som inte satisfierar $y(1) = 1$.
De icke-konstanta lösningarna får vi genom att observera att DE'n är separabel, vilket ger

$$\int \frac{dy}{4-y^2} = \int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = \int \frac{dx}{2x} \tag{1}$$

Integralerna löses antingen m h a partialbråksuppdelning eller m h a Beta,

$$\int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{2+y}\right) dy \tag{2}$$

$$\implies \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+2}{y-2}\right| = \frac{1}{2}\ln|x| + C_1 \implies \frac{y+2}{y-2} = Cx^2, \ \ C = \mathrm{e}^{4C_1} \tag{3}$$

En relativ enkel omformning resulterar i den allmänna icke-konstanta lösningen

$$\boxed{y = \frac{2(Cx^2+1)}{Cx^2-1}}$$

Med insatta villkoret $y(1) = 1$ får vi snabbt $C = -3$ och slutresultatet blir

$$\boxed{y = \frac{3x^2-1}{3x^2+1}}$$

2) Lösning

Vi ser att vi har en DE av 1:a ordning med $x > 0$ och skriver den först på standardformen

$$y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = x^3\mathrm{e}^{2x} \tag{4}$$

som lämpligen löses m h a en integrerande faktor

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int(-3/x)dx} = \mathrm{e}^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3} \tag{5}$$

Detta ger oss sambandet

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)x^3\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{x^3}x^3\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}. \tag{6}$$

En integration leder till

$$\frac{1}{x^3}y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C \tag{7}$$

som resulterar i den **allmänna** lösningen

$$\boxed{y(x) = x^3\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C\right)}$$

Insättning av BV $y(1) = 0$ ger $0 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + C$ eller $C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2$. Alltså blir den **sökta** lösningen

$$\boxed{y(x) = \frac{x^3}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^2\right)}$$

3) Lösning

a) Vi får de kritiska punkterna, konstanta lösningarna, av

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0.2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{2}\right) = 0 \tag{8}$$

m a o $P = 0$ och $P = 2$. Teckenstudie av $P'(t)$, ekv(8), visar att $P = 0$ är en repeller, instabilt, och $P = 2$ är en attraktor, stabilt.

b) Lösningsdiagram